نصوص فلسفية

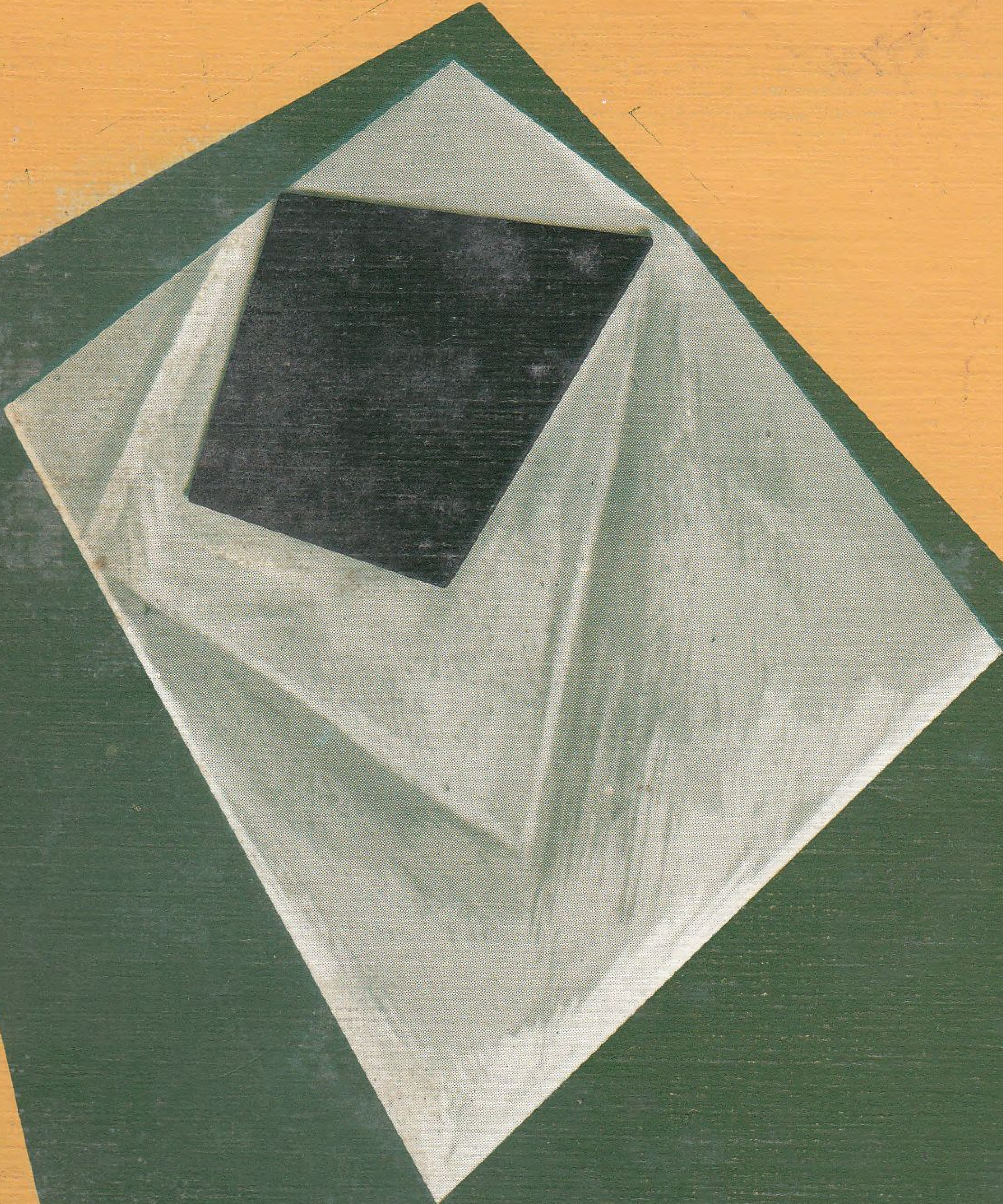
# مقدّمة فى المنطق الرمزى

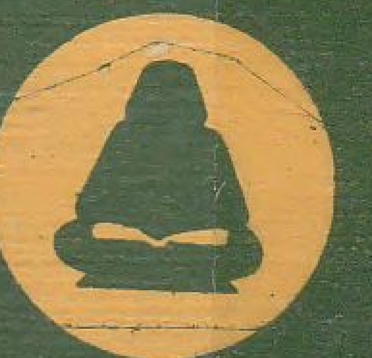
تأليف


ا. هـ. بيسون    د. ج. أوكونر


ترجمة


الدكتور عبد الفتاح الديدى






# مقدمة في المنطق الرمزي

# مقدّمة فى المنطق الرّمزى


تأليف

ا . هـ . بيسون　　　　د . ج . أوكونر

ترجمة

الدكتور عبد الفتاح الديدى





الهيئة المصرية العامة للكتاب

١٩٨٧

# مقدمة

يرجع اهتمامى بترجمة هذا الكتاب فى موضوع المنطق الرمزى إلى ثلاثة أمور :

أولها أننى أجد شغفاً كبيراً بالأبحاث المستحدثة فى اللغه العربية وبالدراسات التى لاتزال إلى حد كبير مجهولة وشبه معدومة فى مجالاتنا العلمية .

وثانيها أن المنطق الرمزى لم يعد الآن مقصوراً على اهتمام المشتغلين بالفلسفة وإنما صار موضوعاً من الموضوعات التى تشغل الباحثين والدارسين كافة فى كل المجالات . ففضلا عن وضع المنطق الرمزى كتكوين أساسى ضرورى بالنسبة إلى عقلية الفيلسوف المعاصر فى هذا العالم المتشابك المعقد الذى نعيش فيه ، أصبح هذا العلم شاغلا أكبر لدى المهتمين بالتكنولوجيا الحديثة وبعلوم الاستراتيجية العسكرية وبالدراسات الرياضية والهندسية وبالمشاغل العقلية ذات الطابع الجبرى بعامة . فيستطيع كل باحث أن يستخدم هذا المنطق الرمزى الجديد على طريقته من أجل تحقيق أهدافه الخاصة فى العلم الذى يشتغل به . ذلك أن هذا العلم هو أسلوب التفكير الحديث السريع المباشر الذى يسعى للعثور على حلول عملية دقيقة منهجية فى كل الإشكالات التى تعترضه . وهو يدل ـ فضلا عن ذلك ـ على أن أسلوب التفكير بأكمله قد طرأ عليه تغير أساسى فى جوهره ابتداء من لحظات ظهور بشائره فى أواخر العشرينات فى هذا القرن[1] عندما بدأ اكتشاف أصول المنطق الرمزى ووسائله على أيدى علماء المنطق الخلّص .

---

(١) أصبح اسم اللوجيستيك باللغة الفرنسية مرادفاً لاسم المنطق الرمزى اعتباراً من سنة ١٩٠٤ بإشارة من المؤتمر الدولى للفلسفة . ولكن استقلال المنطق الرمزى بدأ يتحقق بالفعل فى أواخر العشرينات من هذا القرن . انظر قاموس الفلسفة بقلم ريونز ص ١٨٢ . وأول كتاب فى هذا الموضوع نشر سنة ١٩١٨ من تأليف Lewis وتوالت بعده الدراسات بصور أكثر اكتمالا ونضجاً . وتعنى اللوجيستيك الحساب المنطقى .

وثالث هذه الأمور أننى أحرص أشد الحرص على تحقيق التعاون الثقافى فى أوفق صوره بين مجالات العلم والثقافة فى الغرب ودوائر المعرفة والبحث العقلى بالجمهورية العربية المتحدة . وأعتقد أنه لا ينبغى الاهتمام بأخذ المستويات على حساب غيره من المستويات. فيجب مثلا ألا ينصرف اهتمامنا إلى الثقافة الجماهيرية ونغفل الثقافة التكنولوجية العصرية كما يجب ألا تجور هذه على تلك . بل علينا أن نحقق النجاح لمختلف المستويات فى آن واحد ، وأن ندفع عجلة التقدم هنا وهناك لإعداد مايشبه التوافق العام بين روح الأفراد والجماعات ، ولتذليل الصعاب أمام الباحثين ، والانتصار لكل مايعين على الابتكار والإبداع والتقدم مع الاستمرار فى تزويد القارئ بكل ما يمتعه ثقافيًّا ، وفى توفير كل أدوات المعرفة والفهم للمشاكل المحيطة به .

وإنه لجدير بالذكر هنا أن هذا العلم كما هو مسجل فى القواميس ودوائر المعارف الكبيرة علم فلسفى محض ، لأنه من ابتكار الفلاسفة ، وارتداد نحو الصورية الخاصة بالمنطق الأرسطى الذى عرف منذ القرن الرابع قبل الميلاد فى كتابه الأول المشهور عن المنطق : التحليلات الأولى التى تتناول القياس . فقد عمد فلاسفة العصر الحديث إلى ابتكار هذا العلم الخاص بالمنطق الرمزى على أساس استغلال الصورية المنطقية الأرسطية إلى أقصى حد .

ولم يشأ مؤلفا هذا الكتاب، وهما الأستاذان بيسون وأوكونر ، أن يضعا مقدمة تفصيلية تفسح المجال لتوضيح كاف بالنسبة إلى العلم الذى يشرحانه . وإنما عمدا مباشرة إلى الدخول فى الموضوع ومعالجة مسائل هذا العلم حتى تكون هى نفسها خير تعريف لها وخير تمهيد لإدراك فصوله وأبوابه وحقيقة وضعه ومهمته . بل لعلهما اختصرا أيضاً فى الفصل الأول الذى يمهد للموضوع تمهيداً تاريخيًّا بعض الشىء على أساس تفضيلهما عدم الدخول فى تفصيلات تبلبل ذهن القارئ وتشتت فكره وتقحمه فى مشكلات عويصة بعيدة عن حقيقة العلم الذى يتطلب الدراسة

والفهم . وقد حمدنا لهما هذا المنهج وعرفنا حرصهما على تقديم كتاب علمى يفيد القارئ المحتاج إلى الإلمام بالمنطق الرمزى الجديد ، وقدرنا لهما فوق هذا كله دقة البحث والإحاطة العاجلة السريعة المباشرة بكل جانب على حدة ، مع تفضيل الشرح والتوضيح على نحو مدرسى يسمح للقارئ بمعرفة هذا العلم بمجهوده الشخصى إذا واصل المراجعة والفهم .

والواقع أننى اخترت هذا الكتاب للترجمة بعد جهد كبير فى الموازنة بين الكتب المتخصصة فى هذا الفرع من علوم التكنولوجيا الحديثة ، فرأيت أنه أحقها بالترجمة وأوفاها وأسلسها وأكثرها حرصاً على توضيح كل صغيرة وكبيرة حتى يسهل على القارئ دراسة هذا العلم كاملا ابتداء من هذه السطور[1] .

على أننى أحب ألا يظن القارئ بحال من الأحوال أنه يعرف هذا العلم من كتب عربية سابقة لأن هذا العلم بوضعه فى هذا الكتاب لا يمت بصلة إلى أى مادة مكتوبة أو مطبوعة فى اللغة العربية من قبل . فقد يرد فى بعض الكتب المؤلفة عن المنطق ذكر بعض عبارات مشابهة لما سوف يرد بهذا الكتاب ، ولكنها لا تمت إليها بصلة . وأسلم تحليل لبعض خصائص هذا العلم هو ما جاء فى ثلاث صفحات بمؤخرة كتاب المنطق الصورى والرياضى الذى ألفه الأستاذ الدكتور عبد الرحمن بدوى .

ولكن ما سر هذا العلم الجديد المسمى بالمنطق الرمزى ؟ ولماذا لم تتكلم عنه كتب المنطق العربية ، ولم يحاول أحد إفراد بحث واف عنه .

---

(١) مما لاشك فيه أن هذا الكتاب يتناول موضوعات رياضية لاتزيد على معارف طالب المرحلة الثانوية . ولكن من المؤكد أن البعض يتصور صعوبتها الشديدة . والواقع أنه لا حيلة لنا فيما لابد منه ، ولا مفر من المغامرة من أجل إدخال هذا العلم بين مواد الفلسفة والعلوم الأخرى . وإذا كانت هناك صعوبات ناتجة عن التعبير ، فمما لا شك فيه أن عدم المحاولة خوفاً من إساءة التعبير هو الخطأ الأكبر .

السر فى ذلك هو أن علم المنطق الرمزى جديد تماماً ويحتاج إلى تدريب خاص من أجل الإلمام به ، بل لا تكفى معرفة المنطق من أجل معرفته وفهم مسائله وجزئياته ، ذلك أن المنطق الرمزى هو الحلقة الثالثة فى سلسلة تطور المنطق المعاصر ابتداء من أوائل هذا القرن حتى منتصفه ، فلم يظهر المنطق الرمزى الجديد بصورته النهائية إلا فى الثلاثينات من هذا القرن ، وإن كان قد بدأ المناطقة يضعون أصوله ويحددون معالمه وخصائصه فى أوائل العشرينات على وجه التحديد عندما ظهرت كتب متكاملة فى الموضوع . ولا بد أن نعرف أن بعض الأنساق المنطقية التى كان قد وضعها بعض علماء الرياضيات من الفلاسفة تشبه فى قليل من أجزائها بعض ملامح المنطق الرمزى الحالى . ولكنها فى الواقع لا تعدو أن تكون إرهاصات جزئية جداً وغير مكتملة النضوج بالنسبة إلى المنطق الرمزى الجديد[1] .

والأولى بنا أن نعرف أن كتاب هوايتهيد ورسل عن البرنكيبيا أو أسس الرياضيات قد أثبت بما لا يدع مجالا للشك أن كل الرياضيات تقبل الترجمة إلى لغة المنطق ، أو بعبارة أخرى لا توجد أية عملية رياضية لا تقبل الشرح والتفسير بعمليات منطقية ، ولا توجد أية فكرة فى الرياضيات ترفض التفسير بلغة المنطق . ولهذا أقبل هوايتهيد ورسل على تفسير الأفكار الجوهرية فى الأبنية الرياضية مثل نظرية العد والحساب والجبر والتحليل بما يقابلها من الأفكار المنطقية ، وعمدا معاً إلى وضع النظرية الجبرية المجردة فى صيغة منطق العلاقات بين دفتى ذلك الكتاب .

ولا شك أن عوامل أخرى تعاونت مع هذا الاتجاه فى ترجمة الأفكار الرياضية إلى أفكار منطقية ، فقد شارك كل من فتجنشتاين ونيكو Nicod فى تأسيس

---

(١) انظر مثلا كلام رسل عن المنطق الرمزى فى كتابه عن أصول الرياضيات المترجم إلى اللغة العربية بقلم الدكتورين أحمد فؤاد الأهوانى ومحمد مرسى أحمد .

حساب البديهيات ابتداء من فكرة واحدة ذات وجهين أولهما الكذب الارتباطى كما هو الحال فى التعبير « س ، ص كاذبتان » والآخر التنافر بحيث لايصدقان معاً ولا يكذبان معاً .

وشارك آخرون أيضاً فى هذا الاتجاه من قبل بقصد جعل المنطق ذا بناء من البديهيات وتحويله إلى علم البديهيات . ويعمد هذا العلم إلى اختيار قضايا أولية بمساعدة الصيغ المختلفة ، فيتحتم على كل نسق موضوع موضع التفضيل أن يكون متسقاً محكماً قائماً بذاته بحيث يمكن استنباط بديهية جديدة من البديهيات السابقة المعروفة ، ويتحتم أيضاً أن يكون كاملا بحيث يمكن الحصول على كل الصيغ الباقية ذات المعنى داخل النسق المنطقى ابتداء من صيغ أولية بسيطة .

وحرص الكثيرون منذ أواخر القرن الماضى على إضافة حقيقة من الحقائق إلى هذا العلم الجديد، فعرف مثلا عن برنتانو أنه أدخل فكرتى « الوصل » و « النفى » ، وعرف عن « فريجه » أيضاً أنه أدخل فكرتى « الوصل » . وكان « فريجه » أيضاً أول من أعطى فكرة « المعنى المنطقى » كل قوته التى مهدت لفكرة السلامة المنطقية أو الصحة المنطقية فيما بعد . ثم شارك كل من رسل وهوايتهيد وجونسون Johnson أيضاً بالكثير فيما يتعلق بالنفى والفصل . وعاون على استخدام المنطق بصوره الرياضية الجديدة كل من ليويس Lewis ولانجفورد Langford وجودل K.Godel وبيرس Pierce وسميث H. B. Smith وهايتينج Heyting وعرفت كتب هؤلاء فى أفرع المنطق الرياضى الجديد إلى ما قبل الحرب العالمية الثانية .

غير أن الصورية[1] الكاملة لم تكن قد تحققت كاملة بصورتها النسقية المتأخرة

---

(١) ينبغى أن يدرك القارئ معنى الصورية هنا بمعناها الصحيح الواضح لكى يتمكن فعلا من دراسة المنطق الرمزى ؛ إذ يعنى هذا المنطق بتجريد القضية من محتواها بحيث لا يمكن تحديد معنى صورة القضية إلا بالرجوع إلى تصورات منطقية بحتة . وعندما يتحدث المناطقة عن الصور فهم يقصدون صور القضايا . والتصورات المنطقية البحتة هنا هى الثوابت والمتغيرات على نحو ما سنبين فيما بعد .

إلى ذلك الوقت أى إلى ما قبل الحرب العالمية الثانية . وظن بعض المناطقة أن الهدف من المنطق الجديد هو التعميم . وقدم الكثيرون محاولات من أجل تحقيق التعميم على نحو أمثل ، وكان منطق هانز « رايشنباخ » القائم على الاحتمالات ذا عدد لانهائى من القيم ( قيم الصدق وقيم الكذب ) التى لا تعدو أن تكون تعميماً للمنطق العادى على نحو ما يظهر الفارق بين هندسة إقليدس وهندسة ريمان Riemann أو بين هندسة إقليدس والرياضة البحتة ، ذلك أن التعميم الذى حققه « رايشنباخ » إنما جاء بناء على استبدال فكرة تتابع القضايا أو تسلسلات القضايا أو استلزام القضايا بعضها لبعض بفكرة القضية . وأدى أيضاً إلى تحقيق هذا التعميم استبدال فكرة الاحتمال Probability بفكرة الصدق . وتلعب الأحكام الاحتمالية فى منطق « رايشنباخ » نفس الدور الذى تلعبه أحكام الصدق فى المنطق العادى . وتظهر هذه الأحكام فى منطقه لا بوصفها قضايا صادقة وإنما بوصفها بيانات ذات وزن معين أو ذات ثقل معين بحيث تستلزم ما عداها .

ولكن لم تبدأ الصورية فى الظهور بمعناها الجديد إلا عندما اتضح لرجال المنطق أهمية استقلال البديهيات . فقد أعان البحث عن استقلال البديهيات على اكتشاف الدلالات الحقيقية لعملية التجريد فيما صار يطلق عليه اليوم اسم « التجريد الخاص بحساب البديهيات L'abstraction axiomatique » .

ويتألف هذا المنهج من حقيقة بسيطة ، هى أنه إذا توافر لدينا نسق للبديهيات المستقلة نشرع فى رفضها واحدة بعد الأخرى بعرضها على النسق لكيلا نستبقى منها سوى النظريات الأكثر عمومية . أو بعبارة أخرى ندع النسق الخاص بالبديهيات يستصفى من بينها ما يلائمه منها فقط ، ونستمر فى هذه العملية إلى أن يبقى داخل النسق الخاص بالبديهيات أعم النظريات فقط . مثال ذلك تصفية جميع التعريفات الخاصة بالصفر بحكم التكوين النسقى للبديهيات من أجل الإبقاء

على أعم نظرية ممكنة كقولنا الصفر عدد يتلوه عدد ولا يسبقه عدد . وعمومية هذا التعريف تجعله جديراً بالدخول فى النسق . وتحققت هذه الطريقة عند تأسيس الهندسة العامة ابتداء من ثلاثة مقاييس إقليدية ولا — إقليدية لتكييف هندسة إقليدس عند اوباتشفسكى وريمان مع المنطق الجديث ومع ضرورات الرياضة البحتة . ولكى نزيل الخلاف بين هندسة إقليدس والرياضة البحتة علينا فقط أن نحكم بأن البديهيات يلزم عنها القضايا ، لا أن البديهيات صادقة فالقضايا صادقة تبعاً لذلك . وتمثل تعديل هندسة إقليدس فى إعادة النظر فى افتراضه الخاص بالزاوية القائمة ، وهو مثل معروف شائع ، وتحققت هذه الطريقة أيضاً عند تأسيس التحليل العام من الجبر العادى المعروف والاكتفاء فى الرياضة التحليلية بمبادئ جبرية أولية . وتم ذلك أيضاً مرة أخرى عند إقامة منطق متعدد الأشكال كمنطق العلاقات ومنطق التضايف والمنطق العضوى ومنطق الجهات ومنطق الحدس وغيره وغيره ابتداء من المنطق الزوجى التقليدى المعروف المادى والصورى[1] .

وكان أهم حدث ثورى فى هذا الصدد هو اكتشاف المنهج الخاص بالبديهيات الذى جاء به رودلف كارناب Carnap بأن أحل منهج وصف العلاقات الارتباطية Beziehungsbeschreibung الذى يصف العالم فى حدود وألفاظ العلاقات والأبنية الهيكلية بدلا من الاعتماد على منهج وصف الخصائص الذاتية Eigenschaftsbeschreibung الذى يصف الأشياء بلغة الجواهر والأعراض .

وقد ظهر بعد كارناب أن منهجه أفاد إفادات محققة بحكم كونه عاماً على نحو مطلق لم يسبق له مثيل ؛ إذ تبين أنه يمكن تطبيقه فى أى مجال من مجالات المعرفة . والحق أن كارناب كان قد مهد تمهيداً واضحاً لتأكيد هذه الأوضاع

---

(١) Carnap (R) : Der Logische Aufbau der welt ss.II-I6 (Berlin) B928

الجديدة فى المنطق حينما عرف الفلسفة بأنها نسق القضايا التى تعتمد على السنتاكس أو التركيب اللغوى الذى يمكن أن نصوغه فى لغة علمية يطلق عليها اسم القضايا التركيبية السنتاكسية السياقية .

وفضلا عما كان فى عملية التوحيد بين صيغ المنطق والتكوين اللغوى من صعوبات فإن الصورية التى اكتشفها كارناب لم تكن خالصة نقية ولم تتخلص نهائياً من المواد ، ولم تستخدم بالطريقة المؤدية إلى المنطق الرمزى بصورته الحالية؛ ذلك أن اللغة النموذجية المبسطة بكل ما فيها من الأوصاف الارتباطية على نحو ما وضعها كارناب كانت تهدف أصلا إلى توضيح حساب الاحتمالات والاستقراء وتعميق جوانب كل منهما .

فهو إذن لا يهدف إلى بلوغ التحليلية الكاملة أو بلوغ مرحلة السلامة المنطقية أو ما نسميه أيضاً بالصحة المنطقية أو بتحصيل الحاصل ، فهذه هى الصورية الجديدة الحقة التى تمثل الصدق عن طريق المعانى الناشئة عن الشكل المنطقى ذاته[١] .

ولكيلا تقع بلبلة ذهنية بسبب اختلاط أفرع المنطق بعضها ببعض يحسن أن نرجع إلى تقسيم خارجى لمراحل المنطق الرمزى يحدد خطواته تحديداً جامعاً مانعاً إن صح هذا التعبير هنا فى هذا المجال . وقد وضع هذا التاريخ المرحلى الموجز فى صورة خطوات محددة العلامة « بت E.W. Beth » الأستاذ فى جامعة أمستردام والمتخصص فى مسألة واحدة من مسائل المنطق هى أسس الرياضيات . يقول الأستاذ « بت » ما يلى فى كتابه عن الأسس المنطقية للرياضيات ( ١٩٥٠ — جوتييه — فيلارباريس — ص ٣٥ ) :

---

(١) Quine (Willard van Orman) : From a logical point of view p. 24-p.161.

ينقسم تاريخ المنطق ( فى العصر الحديث ) إلى أربع فترات : الفترة الأولى سادها تفكير « بول » ، وليس لها بالنسبة إلينا سوى أهميتها التاريخية . واقتصرت هذه المرحلة على استيحاء علم الجبر وحده من أجل السيادة الكاملة على الاستدلال المنطقى . أما الفترة الثانية التى اشترك فى إعدادها كل من بيرس ( منطقياً ) وكانتورو ديديكيند ( رياضياً ) فتتميز بالجهود التى بذلها فريجه وإشرودر وبيانو لتطبيق المنطق الجديد فى البحث عن أسس الرياضيات . وتمسك فريجه برغبته فى استخلاص المضمون المتكامل للرياضيات البحتة من مبادئ المنطق وحدها . أما بيرس وإشرودر وبيانو فكانوا أكثر تواضعاً واكتفوا بتسجيل موجز بقدر الإمكان للاستدلال الرياضى عن طريق الرموز المنطقية . والمرحلة الثالثة هى مرحلة اكتشاف النقائض ونقد الحدسيين بما فى ذلك محاولات هيلبرت فيما يتعلق بصورية الرياضيات التقليدية صورية كاملة كشروع فى إثبات عدم التعارض فيما بين كل من الصورية والرياضيات . أما الفترة المعاصرة فتبلغ ذروتها عند تأسيس المنهج السيمانطيقى على يد « تارسكى » من أجل سد الفراغات التى خلقها الاتجاه « الما بعد الرياضى » أو الميتاماتياتيك لدى هيلبرت . ويعاون تارسكى فى هذا أبحاث كل من « إسكوليم » و « جودل » و « تشيرش » .

والمرحلة الجديدة الأخيرة هى التى يمكن أن تسمى بالمنطق الرمزى الجديد . وكل ما عدا ذلك فيما جاء من قبل لا تنطبق عليه هذه التسمية وإنما يصح أن يسمى باسم المنطق الرياضى أو باسم بشائر المنطق الرمزى . أما المنطق الرمزى الحقيقى فهو الذى يبدأ عند أمثال كواين ( ويلارد فان أورمان ) الذى استطاع أن يتمسك بالتحليلية أو بما يصح أن نسميه بتحصيل الحاصل على نحو جديد حقاً أدى به إلى إقرار المنطق الرمزى . وفى هذا العلم الجديد تصبح سلامة الخطوات هى المسألة المنطقية التى تشغل البال بغض النظر عن أى هدف آخر . ( يعبر عن تحصيل الحاصل Tautological أحياناً بالتكرارية ) .

إذن فكل منطق قبل الحرب العالمية يصح أن يطلق عليه عادة اسم المنطق الرياضى . أما المنطق الرمزى فهو محاولة جديدة وأخيرة من أجل ترجمة المنطق الرياضى نفسه إلى منطق وحسب . ويستهدف المنطق الجديد السلامة المنطقية أو ما نسميه بالصحة المنطقية أو التحليلية ، فهو بهذا ينفصل عن نظرية المعرفة ونظريات الاستقراء التى تمسكت بها حلقة فيينا وأشياعها .

إذن فالمنطق الرمزى الجديد ينزع نحو ضمان الصحة المنطقية ، وهذه الصحة المنطقية هى مجرد صحة الانتقالات وتسلسل الاستدلالات وسلامة البناء المنطقى من حيث المعنى المركب من التكوين الصورى نفسه ، أو هى ارتباط المعانى وتحقق وضوح المعنى فى بعض الأجزاء بناء على وضوحه فى بعض الأجزاء الأخرى . والمقصود بالمعانى هنا تشكيل دلالات خاصة بالتكوينات المنطقية البحتة الخالية من أى مضمون مادى يشير إلى حقائق خارجية .

وهذه خطوة لم تحقق من قبل . وقد ساد منذ أقدم العصور حتى القرن الحاضر منطق الصدق أو الكذب . ولم تكد تظهر فكرة الإمكان العارض Lacontingence حتى نفذت إلى صميم كيان عمليات الاستدلال بحيث أضعفت من أهمية الصدق أو الكذب النهائى ، ووضعت أهمية السلامة المنطقية فى المكان الأول ، وأبرزت أهمية التفكير المبنى على الفروض فى دائرة الاستدلال والقائم على أساس المسلمات .

فالصدق فى المنطق الرمزى الجديد هو صدق المعنى كصورة منطقية وصحة التكوين المنطقى الخالص . وقد يكون الاستدلال صادقاً بدون صدق منطقى وقد يكون الاستدلال كاذباً وهو صادق منطقياً . وكثيراً ما تكون العبارات صادقة

من جانب سور القضية أوكم المحمول Quantification ولكنها لاتكون صحيحة منطقياً[١] .

وبناء على ذلك أقر لانجفورد وليويس فى كتابهما عن المنطق الرمزى سنة ١٩٣٢ الاعتماد نهائياً على التسلسل المنطقى الصحيح والاستلزام القضوى أى لزوم أن تترتب قضية على أخرى ، واعتمد اعتماداً كلياً على فكرة السلامة المنطقية التى تظهر مع صحة ما يترتب على القضايا أو يستجد من الاستدلالات بعضه بالنسبة إلى البعض الآخر . ومن هنا تولدت فكرة أن البناء المنطقى إذا صح معناه كان منطقياً ، فيكون البرهان صحيحاً منطقياً فى حالة واحدة فقط ، هى أن يكون من غير المتوافق أو المقبول منقطياً قبول المقدمات ورفض النتائج . فالبرهان الاستدلالى خيط يتخذ صورة يكون من التناقض قبول مقدماتها ورفض نتائجها .

ومعنى هذا أنه ينبغى أن نفصل بين المنطق الرياضى والمنطق الرمزى الجديد. وبرغم أن المنطق الجديد ينتمى إلى محاولات قديمة ظهرت فى أواخر القرن الماضى وامتدت جذورها إلى صفحات عديدة فى كتب المناطقة فى أوائل هذا القرن ، فإنه من الصعب إطلاق اسم المنطق الرمزى على غير المنطق الجديد المختص بالتحليلية analyticity أو بالصورية الكاملة ذات المعانى المترتبة على تكوين الهيكل الصورى نفسه . فالصدق فى المنطق الجديد هو صدق المعنى التحليلى ،

(١) من بين موضوعات العلوم الحديثة مسائل تحول صعوبة عرضها دون الشروع فى عرضها باللغة العربية لأول مرة . ومثل هذه العروض الأولية مسائل جديدة صعبة المنال تتطلب جرأة كبيرة وتؤدى عادة إلى الاتهام بالغموض . ولكن أليس الغموض المبدئى فى مطلع العلم أولى من عدم وجود أى مادة بخصوص أحد الموضوعات فى لغة تدعى أنها من لغات العالم الأساسية كاللغة العربية ؟

أى سلامة البناء المنطقى المؤدى داخل العمليات ، وهذا هو ما يميز المنطق الرمزى من سواه [١] .

وقد بدأت ملامح هذا المنطق الجديد النهائية تتضح عندما نشر كواين بحثه المشهور عن الأسس الجديدة للمنطق الرياضى معلقاً على نظرية رسل وهوايتهيد فى كتابهما المسمى بالبرنكيبيا فى سنة ١٩٣٧ ، فأظهر كواين كيف اكتشف رسل أن نظرية الجبر المجرد يمكن استقاؤها من منطق العلاقات ، وأن هذه النظرية تؤدى إلى تعميمات رائعة ضخمة توفر للعلماء آلة منهجية قوية لم يكن يتمتع بها منطق أرسطو .

واعتمد منطق رسل على ثلاثة أقسام هى منطق القضايا ومنطق الفئات أو الأصناف ومنطق العلاقات . وامتازت الأفكار البدائية الخاصة بالحدود والألفاظ التى عبر بها ذلك الحساب الحديد بأنها منطقية خالصة . (راجع كتاب أصول الرياضيات لرسل فى الترجمة العربية ص ٤٣ ) .

غير أن التقدم الذى أحرزه المنطق الجديد بعد رسل أدى إلى إظهار حقيقتين هامتين :

أولاهما : أن أسس كتاب البرنكيبيا قد سادها غموض شديد بسبب الدالة القضوية ، وأدى وجود هذه الدالة فى البرنكيبيا ودورها الذى لعبته فى نظرية اللاصنف ( اللافئة ) إلى ظهور النقص الشديد فى موقفه ؛ إذ أن منهجه يستبعد الأصناف ( الفئات ) بسبب تمسكه بعالم تجريدى مماثل خاص بالأشياء الكلية أسماه بالدالة القضوية . وقد ترتب على غموض هذه الدالة فى منطق البرنكيبيا وفساد استخدامها

---

( ١ ) قد تثير كلمة المعنى إشكالات كثيرة هنا . ولكن المتابع للمنطق الرياضى وطريقة استعمال لفظة المعنى عند فريجه وعند كواين يدرك أن المعنى المقصود فى المنطق الرمزى هو المعنى المنطقى أو المعنى الصورى الذى يشير إليه تكوين العبارة فى حد ذاته بغض النظر عن مادة الكلام نفسها .

أنها كانت تشير أحياناً إلى العبارة المفتوحة وأحياناً أخرى تعنى الصفة . وتستعمل نظرية رسل عن اللافئة عبارة الدوال القضوية بمعنى الصفات كقيم للمتغيرات المقيدة . ولهذا فلا يمكن أن نطمع منها فى أكثر من تحويل بعض الكليات إلى سواها ورد الأصناف إلى صفات[1] .

ولكن بما أن نظرية الصفات هي نفسها على طول الخط نظرية الأصناف بدون أي اختلاف فقد كان الأجدر الاكتفاء بهذه النظرية وفقاً لمبدأ الهوية بين اللامميزات .

وأخراهما : أن عدد الأفكار المنطقية الواردة فى كتاب البرنكيبيا أضخم من أن يحتملها المنطق الرمزى الجديد . فقد أثبتت الأبحاث الجديدة فى هذا المجال أن عدد الأفكار المنطقية لدى رسل أكبر من أن تصلح للمنطق الرمزى . فالمنطق الرمزى يحتاج إلى أقل عدد ممكن من الأفكار المنطقية . وثبت فعلا أنه يمكن أن يستغنى عن كل الأفكار المنطقية لدى رسل ما عدا ثلاثاً من بينها هى :

١ — الانتماء : وعلامته ( $\in$ ) وتتحكم فى كل ما يوجد بين القوسين .

٢ — رفض أحد البديلين : ويعبر عنه بالعلامة « / » فى كتابنا هذا وبالعلامة « ا » فى كتاب البرنكيبيا .

٣ — التكميم الكلى أو كم المحمول الكلى Universal quantifier : ويعبر عنه باستخدام إحدى المتغيرات بين قوسين قبل العبارة مثل ( س ) ( س $\in$ ص ) ومعناها هنا فى وضعها قبل العبارة ( أيا تكن س ) . ومعنى الصيغة أنه أيا كان س ينتمى إلى ص .

---

( ١ ) استخدمت لفظة « فصل » فى ترجمة لفظة class فى أصول الرياضيات — الترجمة العربية — عن برتراند رسل . والواقع أن السائد الآن استعمالان يغلبان بحسب المناسبة وهما : الصنف والفئة . والاستعمال الأول أصح ، ولكن الثانى يساعد أحياناً بدرجة أكبر على الوضوح .

وبالتالى تصبح كل الرياضيات وكل المنطق أيضاً موضوعاً يترجم بلغة أخرى. هذه اللغة الجديدة هى المنطق الرمزى المؤسس على عدد لا نهائى من المتغيرات أ ، ب ، ج ، د ، س ، ص ، ل ، ط وكذلك اَ ، بَ إلخ . . . وعلى هذه الحالات الثلاث الخاصة بالتأليف بين الترقيمات .

وقد استطاع كواين أن يشرح لأول مرة حقيقة المنطق الرمزى الجديد فى هذا البحث الهام الذى أشرنا إليه . واهتم فيه بأن يبرز جوانب المنطق الرمزى كافة على أساس أبسط الأفكار المذكورة فى وضوح تام داخل إطار الفكرة الجديدة لهذا العلم .

واستطاع هذا الكتاب الذى نترجمه اليوم إلى اللغة العربية أن يبرز كل جوانب هذا العلم الجديد بصورة دقيقة موجزة واضحة فى آن معاً بحيث يمكن أن يدرسه الطالب بمفرده فيقف على كافة أجزائه . وهو كتاب لغير المتخصصين تخصصاً غالباً لأنه يقصد جمهوراً واسعاً من الطلاب لا جمهوراً خاصاً من الباحثين والمتخصصين . .

وغنى عن البيان أن فوائد هذا المنطق الجديد كثيرة ومتفرعة . فهو يستهدف تسلسل البراهين والاستدلالات تسلسلا يضمن أعلى قدر من الضمان واليقين . وبمجرد إقامة حساب البديهيات الخاص بنظرية الاستدلال على أساس صورى خالص لانكاد نجد حاجة ما إلى بذل أى جهد فى تناول وتداول الرموز ؛ إذ لاتلبث عملية تداول الرموز أن تستحيل إلى مجرد استدلالات للصيغ المتكافئة بعضها محل بعض وتصبح بالتالى موضع تحكم كامل .

ويفيد هذا المنطق الرمزى الجديد فى الاقتصاد فى الفكر ، فهو يوفر لنا كثيراً جداً من الجهود ومن التشعيب الفكرى ، ويسمح لنا بمجرد اكتشاف الهوية بين عدد من الأبنية ببسط البراهين المثبتة إلى مجال آخر غير المجال الأسبق .. ولاشك

أن المنطق الرمزى قد استطاع التخلص نهائياً من منطق التصورات ، وأدى ذلك بالتالى إلى تجريد وتعميم لم يكن يسهل بلوغهما مع استمرار التجريد التصورى لدى القدماء .

ولعلنا نكون قد أوضحنا هنا خط السير الجديد الذى رسمه ظهور المنطق الرمزى . وأهم شىء هو أن نتعرف على بزوغ هذا المنطق الجديد ، فهذا من شأنه أن يعرفنا على حقيقته ، بناء على موقفه المستحدث وبناء على فهم يغاير الفهم القديم ويحدد لنا الفارق بينه وبين المنطق الرياضى .

وإذا لم تكن الكتب العربية قد عالجت للآن هذا المنطق فذلك قصور يستوجب سرعة العلاج ونقص يتطلب جهداً كبيراً يتفق مع حاجة البلاد إلى التكنولوجيا المعاصرة ، فهذا هو أول الطريق إلى التكنولوجيا .

د. عبد الفتاح الديدى

# تصدير

يوفر هذا الكتاب للمبتدئ فى المنطق الصورى مقدمة موجزة تعد وافية بشأن النقاط الهامة التى تمثل الأساس لدراسة كتب أخرى ذات مستوى أعلى. فتعرف الفصول الأربعة الأولى بحساب القضايا ، كما يقدم الفصلان الأخيران صورة مجملة عن حساب المحمولات الذى يبذل فيه اهتمام خاص بالفكرة الأساسية الخاصة عن الاستيفاء Satisfiability ، ويعمد ملحق الكتاب إلى إجمال المذهب التقليدى الخاص بالقياس وعلاقته بالحساب الجبرى الخاص بالفئات على نحو ما حدده بول Boole ، ولا يتطلب الكتاب أى معرفة سابقة بعلم المنطق ، برغم أن القسم الأول من الفصل الأول سيكون موضع اهتمام الطلاب الذين بلغوا بعض المعرفة بالمنطق التقليدى الخاص بالقياس .

وبرغم أننا حاولنا أن نبلغ درجة الإيجاز المعقولة فى مثل هذا الكتاب الأولى فقد كان المقصود به هو المبتدئ لا المنطقى المتقدم فى مجال بحثه ، لأنه سيأخذ عليه بلاشك التزام البساطة فى العرض . وتحاشينا أى نقاش فلسفى حتى فيما يتعلق بالمسألة الهامة التى تخص علاقة المنطق باللغة العادية .

ووضعنا ملاحظات مستوفاة المراجع من أجل إرشاد الطالب نحو قراءات أوسع ، كما زودنا الكتاب بالتمرينات اللازمة . ولعلنا نؤكد هنا أن أهمية حل التمرينات تعادل فى فهم كتاب أولى عن المنطق أهميتها فى الرياضيات .

سنة ١٩٥٣

المؤلفان

أ. هـ. بيسون

د. ج. أوكونر

# تنبيه من المترجم

حاولت في الترجمة ألا أتعصب لأى مصطلح مهما كانت قيمته، ومهما كان تقديرى لصاحبه . لقد عانيت دراسة هذا المنطق ، وقمت بالتدريبات العملية الخاصة بدروسه، وألقيت عدة محاضرات بالسوربون عن بعض جوانبه تحت إشراف أستاذى الراحل باشلار ، فضلا عن دراستى له بألمانيا على إشتيكمولر وأنسب الألفاظ المترجمة هى المختارة فى هذا الكتاب .

# الفصل الأول

## تمهيد

### ١ — المنطق الرمزى والمنطق القديم

تاريخ المنطق الرمزى قصير ، فى حين يحظى المنطق الأرسطى التقليدى أو الكلاسيكى بتاريخ طويل ، غير أن الاختلاف بينهما هو مجرد اختلاف فى مراحل التطور ، فالمنطق التقليدى مرتبط بالمنطق الرمزى كارتباط الجنين بالجسم البالغ . ومن الضرورى تأكيد هذه النقطة منذ البداية بسبب ما أثير من النقاش والخلاف حول طبيعة المنطق الرمزى ومكانته فى الخمسين سنة الأخيرة بخاصة . ووجه بعض المناطقة المتفلسفين الذين نشأوا فى ظل المنطق التقليدى نقدهم أحياناً إلى المناطقة الرمزيين على أساس أن المنطق الجديد ينطوى على إساءات فهم بالغة عن طبيعة المنطق . ونقد المناطقة الرمزيون أحياناً عيوب المنطق التقليدى كما لو كان شيئاً متخلفاً عن زمنه .

وصار الآن من المتفق عليه بين المناطقة أن المنطق الرمزى الجديد تطوير للتصورات « والتقنيات » أو العمليات الفنية [١] التى تضمنها الكتاب الذى ألفه أرسطو عن المنطق ، غير أن هذه الواقعة قد سادها الغموض وقتاً طويلا بسبب التاريخ العجيب لهذا الموضوع . إذ كان أرسطو قد وضع أسس المنطق بذكاء وبصورة كاملة فى القرن الرابع قبل الميلاد ، حتى تخيل الكثيرون ممن

---

( ١ ) التقنيات بمعنى الصناعة الفنية Technic تستخدم اليوم عادة كترجمة صوتية عربية على طريقة القدامى فى التعريب : أنا لوطيقا ـ فيزيقا ـ استيطيقا وهكذا . ونعتقد أنها صارت جارية اليوم على الألسن (المترجم) .

جاءوا بعده أن علم المنطق قد أصبح تاما كعلم . ولكن صار من المحقق الآن أن مؤلف أرسطو عن المنطق قد غطي جزءاً صغيراً من أجزاء المنطق وإن كان بالغ الأهمية . بل يرجع بعض السبب فى إخفاق المناطقة فى إضافة أى إضافات ذات قيمة فى هذا الموضوع خلال الألفين التاليين من السنين إلى كمال هذا الكتاب الذى وضعه .

وأظهرت الدراسة الحديثة جداً فى تاريخ المنطق أن كلا من الإغريق الذين جاءوا بعد أرسطو ومن المدرسيين الذين جاءوا فى العصور الوسطى قد قاموا بعدة اكتشافات منطقية هامة ، غير أن أهمية هذه الاكتشافات لم تكن قد تبينت بعامة فى الوقت الذى تمت فيه ، وبالتالى فقد أخفقت فى المبادرة بأى تجديد فى تطور نظرية المنطق وعملياته الفنية أو تقنياته . وكان سبب ذلك مزدوجاً . فقد أدى الاعتقاد العـــام بأن كل الاكتشافات المنطقية سبق أن قام بها أرسطو ، إلى الحيلولة دون تقدير أى اكتشاف جديد تقديراً يتناسب مع قيمته الحقيقية ، غير أنه يوجد سبب آخر أكثر أهمية وهو حالة العلوم الرياضية المختلفة قبل القرن السابع عشر .

لقد قدم أرسطو فى المنطق فكرة ذات أهمية بالغة وهى فكرة المتغير Variable وتعد هذه الفكرة اليوم شيئاً مألوفاً تماماً لدى الرجال والنساء المثقفين لأنهم يلقونها فى أثناء كل حصص الجبر الابتدائى . والمتغير رمز يقوم مقام أى سلسلة من المقادير والقيم . فإذا كان لدينا ــ

$$\text{س}^{2} = 4$$

كانت س متغيراً تحل محل كل من المقدارين : +٢ و ــ ٢ وإذا كان لدينا ــ

$$\text{س} + \text{ى} = 7$$

كان س ، ى متغيرين يمران بصف الأعداد واحداً واحداً ابتداء من الصفر حتى ٧ . وهكذا .

ويعد استخدام المتغيرات مألوفاً جداً في الرياضيات الأولية بما لا يدعو إلى أي حاجة للتوضيح هنا . غير أنه لم يصبح مألوفاً إلا خلال تطور المعرفة الرياضية وانتشارها . ووقف استخدام أرسطو للمتغيرات في المنطق عند حد تمثيل الحدود المستعملة في براهين القياس بواسطة الحروف من أجل إبراز البناء المنطقي الخاص بالبراهين التي تنتمي إلى هذا النوع بطريقة أكثر وضوحاً . إلا أن استخدام المتغيرات في المنطق الرمزي يعد أكثر اتساعاً من ذلك[1] . ولكن ينبغي أن نعتقد أن هذا وحده لم يكن الطريق الذي اختطته الرياضيات في تطورها وسارت فيه من أجل المشاركة في تجديد المنطق وتأسيس المنطق الرمزي. ولكي يسهل علينا تصور الطريقة التي تجددت بها أبواب المنطق سنرجع إلى ماقاله أحد المناطقة المحدثين المبرزين وهو ليويس C. I. Lewis حينما حاول أن يسجل ثلاث خصائص مميزة للمنطق الرمزي :

**أولاً** : يتميز المنطق الرمزي باستخدام الرموز العقلية أو **الإيديوجرامات** Ideograms التي تشير مباشرة إلى التصورات بدلاً من العلامات الصوتية أو الفونوجرامات Phonograms التي تشير مباشرة إلى الأصوات وإن كانت تشير إلى التصورات أيضاً ولكن بطريق غير مباشر .

مثال ذلك الرمز الدال على عملية الضرب ( × ) أو علامة الاستفهام ( ؟ ) فهي كلها رموز عقلية ( إيديوجرامات ) شأنها في ذلك شأن الحروف الكتابية في اللغة الصينية . أما الألفاظ المكتوبة مثل « علامة الضرب » أو « علامة الاستفهام » فتمثل مباشرة الألفاظ المنطوقة التي تناظر كلا منهما كما هو الحال في كل اللغات المكتوبة وفقاً لبعض القواعد الصوتية اللغوية .

**ثانياً** : يتميز المنطق أيضاً **بالمنهج الاستنباطي** ( أو بالاستدلال ) وهذا

---

(١) كل القضايا الممثلة برموز في حساب القضايا على نحو ما سيأتي فيما بعد هي متغيرات ( المترجم ) .

مألوف لطول ماورد بالكتب المدرسية فى علم الهندسة والخاصة المميزة لهذا المنهج هى القدرة على توليد عدد لا حصر له من الأحكام الجديدة الباهرة من عدد صغير من الأحكام عن طريق تطبيق عدد قليل من القواعد .

ثالثاً : يتميز المنطق الرمزى أيضاً باستخدام المتغيرات ذات المواضع المحددة من الدلالات . ( وقد سبق ذكر هذه النقطة من قبل ) .

وهذه الخصائص المميزة الثلاث للمنطق الرمزى هى أيضاً كما هو واضح خصائص مميزة للرياضيات نفسها بحكم أن تطور المنطق الرمزى ارتبط ارتباطاً تاماً بتطور الرياضيات . ومن الأشياء ذات الدلالة هنا أن كل الرواد فى هذا الموضوع كانوا إما من المتخصصين فى الرياضيات أو من الفلاسفة ذوى المران الطويل على مناهج الرياضيات وذوى التقدير أيضاً لهذه المناهج .

وكان أول الأسماء الهامة فى تطور المنطق من صورته الكلاسيكية التقليدية إلى صورته الرمزية الحديثة هو ليبنتس G. w. von Leibniz ( ١٦٤٦—١٧١٦ ) وكان مشهوراً كفيلسوف بنفس قدر شهرته كمتخصص فى الرياضيات لأنه عرف بوصفه شريك نيوتن فى اختراع حساب التفاضل (differential Calculus ) ونشر كتاباً قبل بلوغه العشرين تحت عنوان « بحث فى فن التأليفات » ضمنه خطة ذات شقين من أجل إصلاح المنطق . واقترح أولا إنشاء لغة علمية عالمية يمكن تمثيل كافة التصورات العلمية فيها عن طريق التوافق والتأليف بين الرموز العقلية أو الإيديوجرامات الأصلية . وينتمى هذا الاقتراح إلى حقل اللغويات أكثر مما ينتمى إلى المنطق فيما عدا اقتراحه بإحلال الإيديوجرامات أو الرموز العقلية محل الفونوجرامات أو العلامات الصوتية . أما اقتراحه الثانى فأكثر أهمية . إذ اقترح ليبنتس فى بحثه ذلك أن الحساب العالمى للاستدلال العقلى قد يكون اختراعه مفيداً فى توفير منهج آلى لحل كل المشكلات التى يعبر عنها باللغة العالمية. ولو حقق اقتراحه لزودنا بنسق من المنطق الرمزى . غير أن خطته بقيت مجرد اقتراح لم يتطور.

أما الاسم الثانى الذى يتصف بالأهمية بصدد تطور المنطق الرمزى فهو اسم جورج بول ( ١٨١٥ — ١٨٦٤ ) . وكان بول من المشتغلين بالرياضيات واحتل كرسى الرياضيات فى كوينز كوليدج بإقليم كورك . وتألفت إضافته العملية من صياغة نسق جبرى تقوم فيه المتغيرات مقام الفئات أو الأصناف ، وتمثل فيه كل من عمليتى الضرب والجمع طرقاً مختلفة لتأليف الأصناف من أجل استخراج أصناف أرفع . وقد تم عرض النسق أول الأمر فى كتاب صغير يسمى « التحليل الرياضى للمنطق » ونشر هذا الكتاب سنة ١٨٤٧ . وأعاد بول تطبيق نسقه الجبرى فى عدة أفرع من المنطق بينها قياس المنطق التقليدى نفسه فى دراسة أخرى تحت اسم قوانين الفكر . وقصد بول من هذه الدراسة إظهار أن من الجائز أن يكون المذهب الخاص بالقياس الأرسطى ، الذى كان ينظر إليه على أنه يسد نفس الحاجات والمستويات التى يسدها منطق الاستنباط ، حالة خاصة من بعض أنواع الجبر المنطقى . ولم يمض وقت طويل حتى أظهر أتباع بول أن نسقه الجبرى كان مجرد أحد ضروب الحساب الرمزى الذى يتألف منه المنطق نفسه .

ومن الأعمال الهامة التى قام بها مناطقة القرن التاسع عشر ذلك العمل الذى حققه أوجسطس دى مورجان (١٨٠٦ — ١٨٧١) فى منطق العلاقات وذلك الذى حققه جيفونز ( ١٨٣٥ — ١٨٨٢ ) عندما أخذ على عاتقه مهمة تبسيط جبر الفئات ( الأصناف ) المنطقى الخاص ببول ثم تطويره[١] . غير أن أهم اسم أمريكى هو بيرس ( ١٨٣٩ — ١٩١٤ ) الذى شارك مشاركات ذات أهمية قصوى فى كل فرع من أفرع المنطق . وكانت له كتابات مطولة فى هذا الميدان لم ينشر أغلبها . وتبينت روعة ما سجله وتميز به فى القرن الحالى فقط

---

(١) نترجم Class بصنف أو فئة ونعتقد أنها أفضل من « فصل » كما استخدمت من قبل . (المترجم)

عندما تم تجميع كتاباته وأمكن نشرها .

وفى هذه الأثناء كان عدد من المختصين فى الرياضيات على أرض القارة الأوروبية يشغلون أنفسهم بأسس الرياضيات ويهتمون بها . وقد واصل أعمالهم، وبخاصة أعمال كل من جوتلوب فريجه Frege وجيسيبا بيانو Peano ، الفيلسوف الإنجليزى برتراند رسل ويسمى لورد رسل حالياً . . فقد تعاون كل من رسل وهوايتهيد سنة ١٩١٠ على إصدار أصول الرياضيات المعروفة باسم البرانكيبيا ، وهو كتاب ضخم الأثر تم فيه تأصيل نسق للمنطق الرمزى وقصد به أن يوضع ويستقر كأساس لكل الرياضيات . ووجدت أعمال كل السابقين طريقها إلى التنفيذ والتأييد الرمزى أو الرياضى للمنطق فى كتاب رسل وهوايتهيد . وكان هذا الكتاب بمثابة التبشير بالتحول المنطقى الذى جرى فى أثناء القرن الماضى . وتقدم المنطق تقدماً ملموساً ونما نمواً ضخماً منذ ظهور كتاب البرانكيبيا الرياضية .

ويهمنا أن نلاحظ أن نمو المنطق مضى بطيئاً هادئاً إلى حد بعيد منذ عصر ليبنتس من خلال عمله الأساسى فى حقل الرياضيات . ولكن أهمية المنطق الرمزى لاترجع أصلا إلى دراسة أسس الرياضيات برغم أن هذه الأسس هى بعض المجالات التى يمكنه فيها أن يفيد فائدة محققة ، إذ يشارك المنطق الرمزى المنطق التقليدى أيضاً فى وظيفته التى يقوم بها من أجل تدبير منهج لاختبار صحة البراهين التى تتخلل اللغة العادية ، كما أنه يقدم مناهج من أجل تقرير صدق أصناف البراهين وأنماطها التى لا يملك المنطق القديم القدرة على إختبارها. وفضلا عن ذلك يوفر المنطق الرمزى إجراء يتيسر به تحليل بناء القضايا(١) . ولعل هذا من الأشياء الملائمة بل الضرورية أحياناً بالنسبة إلى البرهان الفلسفى؛ فهذا البرهان الفلسفى كثيراً ما يتعرض بسبب العيوب والتناقضات الموجودة فى

(١) انظر الفقرة الأولى من الفصل الثانى من هذا الكتاب حيث شرح لفظة : قضيه .

تعبير الحياة اليومية لغموض معنى الأحكام وعدم وضوح العبارات . والواقع أن المنطق الرمزى يقوم بكل الأعمال والمهام التى اعتاد أن يقوم بها المنطق التقليدى كما يقوم أيضاً بمهام أخرى كثيرة لم يستطع أن يوفيها المنطق التقليدى حقها . وهذا هو ما كان يجب أن نتوقعه إذا كان المنطق الرمزى صورة متطورة للمنطق التقليدى وخطوة جديدة مستحدثة من خطواته(١) .

٢ — استعمال الرموز

من وظائف المنطق الأولى أنه يوفر مناهج اختبار لصحة البراهين . ومن أجل استيفاء هذه الوظيفة وتحقيق هذه الغاية علينا أن نكون قادرين على تصنيف البراهين وتقسيمها إلى أصناف أو أنواع مختلفة بحيث يكون من خاصية كل نوع منها أن يتصف بملامح معينة مشتركة مع بقية البراهين من نفس هذا الصنف . وتسمى الملامح أو الصفات التى تشترك فيها هذه البراهين على هذا النحو مع غيرها من نفس الصنف « الصورة المنطقية » للبرهان . وسوف نتناول هذه الصورة المنطقية فى الفقرة التالية ولا حاجة بنا إلى أن نقول أكثر من ذلك الآن بهذا الصدد . غير أن المنهج التقليدى الخاص بتصنيف البراهين إلى أنماط أو أنواع الذى ابتدعه أرسطو كان يتضمن أيضاً عملية استخدام الرموز .

خذ مثلا الزوجين التاليين من البراهين :

( ١ ) لاتوجد مجتمعات رأسمالية مستقرة وبعض المجتمعات الرأسمالية من الديمقراطيات . إذن فبعض الديمقراطيات غير مستقرة .

( ١ ) النقطة الرئيسية التى أدت إلى التحول الحقيقى فى المنطق هى الاستفادة الى أقصى حد من فكرة الصورية فى المنطق الأرسطى نفسه . ولهذا فكل هذه المحاولات السابقة التى تهدف إلى إشباع المنطق بالأفكار الرياضية لاتعد سوى بداية مجازية لتاريخ المنطق الرمزى أما البداية الحقيقية فتبدأ بمنطقة الرياضيات أولا ثم العودة إلى صورية أرسطو ثانياً (المترجم). انظر كتاب النفسانية المنطقية للمترجم ص ١٥ — ١٦

(٢) ليس من بين الزنوج بابوات للكاثوليك وبعض الزنوج مسلمون . إذن فبعض المسلمين ليسوا بابوات للكاثوليك .

(٣) إذا ارتفع سعر الذهب ازدادت الواردات ولكن الواردات لن تزداد . إذن فلن يرتفع سعر الذهب .

(٤) إذا تسبب الجليد فى تكوين الوادى كانت هناك صخور منحوتة ولكن لم يكن ثمة أية صخور منحوتة . إذن لم يتسبب الجليد فى تكوين الوادى .

إذا فحصنا هذه البراهين كان من السهل ملاحظة ما يلى :

أولا : أنها صحيحة .

وثانياً : أنه يوجد شبه بين كل من البرهانين ١ ، ٢ وكذلك بين كل من البرهانين ٣ ، ٤ .

ويلاحظ أن التشابهات لا تتوافر بين محتوى أو مضمون هذه البراهين المشار إليها . ذلك أن مضمون البرهان رقم (١) لا علاقة له بمضمون البرهان رقم (٢) . كذلك لا علاقة لمضمون البرهان رقم (٣) بالبرهان رقم (٤) ولكن إذا أحللنا الحروف أ ، ب ، جـ محل الحدود الموجودة فى البرهانين رقم (١) ، (٢) برزت التشابهات بوضوح بينهما . إذ يصبح كلا البرهانين الأوليين (١) ، (٢) على النحو التالى :

(٥) لا أحد فى أ هو ب وبعض أ هو جـ .
إذن ليس بعض جـ هو ب .

وبالمثل إذا أحللنا الحروف س ، ص محل مكونات البرهانين (٣) ، (٤) لتوافر لدينا .

(٦) إذا كان س
إذن ص
ولكن لا س
إذن لا ص

وعلى ذلك فاستعمال الرموز (فى هذه الحالة هى حروف الألفاظ) يعيننا على استخراج ملامح ذات أهمية منطقية فى البراهين حتى يتيسر وضعها فى تصنيفات نوعية يمكننا أن نطبق عليها القواعد العامة.

وتسمى الرموز المستخدمة فى الأمثلة السابقة بالمتغيرات لأنها تستطيع أن تقوم بلا أدنى اختلاف مقام أى حدود أخرى من ناحية أو أى أحكام من ناحية أخرى. ويعاوننا استخدام المتغيرات على وضع قواعد عامة من أجل اختبار صحة البراهين وسلامتها. ولذلك نستطيع أن نقول إن أى برهان من النوع التالى :

إذا كان لا أ هو ب

وكان بعض أ هو ج

إذن فبعض ج ليس ب

هو برهان صحيح.

وأى برهان كان من النوع التالى :

إذا كان س إذن ص

ولكن لا س إذن لا ص

هو أيضاً برهان صحيح

وعلى ذلك يكون التعبير عن عمومية قواعد المنطق إحدى وظائف الرموز المنطقية الهامة. غير أن هذه ليست على أى حال وظيفتها الوحيدة. إذ آن استخدام الرموز فى المنطق له أيضاً أهمية ثانية معادلة للأهمية السابقة من حيث إنه يوفر الإيجاز الدقيق والاقتصاد فى التعبير بالنسبة إلى الأحكام المعقدة التى يصعب

أو يستحيل فهمها إذا وضعت فى تعبير باللغة العادية [١] واستعمال الرموز على هذا النحو جار بوضوح فى الجبر الابتدائى . انظر مثلا فى الزوج التالى من التعبيرات المتعادلة :

(٧) حاصل ضرب كل من ناتجى جمع وطرح عددين معادل للفرق بين مربعى هذين العددين .

(٨) (ا + ب) (ا ـ ب) = (ا$^{٢}$ ـ ب$^{٢}$)

فسنلاحظ أن معنى العبارة رقم (٧) يحتاج إلى جهد عقلى معين لإدراكه على حين يتضح معنى العبارة رقم (٨) مباشرة لأى شخص يعرف استخدام الرموز الواردة فيها .

وحيثما كانت التعبيرات أكثر تعقيداً كانت أقوال اللغة العادية أبعد وأشد غموضاً من أن تعبر عن معانيها بوضوح .

ولعله يكون من الممكن التعبير بغير استعمال الرموز عن حكم كالآتى :

« تعبر الصيغة التالية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا جـ}}{٢ ا}$$

عن جذور المعادلة لقيمة س

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = صفر .

(١) يقول رسل (أصول الرياضيات ـ جزء أول ـ ترجمة الأهوانى ومرسى أحمد ـ ص ٤١) : لم يصبح المنطق الرمزى اليوم أساسيًّا فقط لكل منطقى مشتغل بالفلسفة بل هو ضرورى كذلك لفهم الرياضة عامة وهو لازم حتى لممارسة بعض فروع الرياضة ممارسة ناجحة . وكل الذين خبروا السلاح القوى الذى وضعته الدراية بهذا العلم فى أيدى الباحثين يدركون مقدار فائدته العلمية . (المترجم)

ولكن التعبير اللغوى المناظر لهذا الحكم سيكون معقداً وثقيلا بحيث يصبح من الصعب نفسيًّا فهمه .

وتصبح فوائد الإيجاز الدقيق والوضوح التى يوفرها استعمال الرموز ملحوظة جدًّا حيال أكثر أصناف الاستدلال الرياضى تعقيداً . ولعله من الجائز من الناحية النظرية التعبير عن الصيغ أو أنواع الحساب الرياضى بلغة الحياة اليومية بدون أى معاونة من نظام رمزى خاص . غير أننا لو حاولنا ذلك لأمكن سريعاً جدًّا بلوغ آماد الفهم العملى التطبيقى . ولا مفر عادة من الرجوع إلى نسق رمزى خاص من أجل فهم تعبيرات الرياضيات ومن أجل الاشتغال بها . ويصدق هذا أيضاً على المنطق بمجرد الانطلاق إلى مدى أبعد من مستوياته البسيطة أو التقدم بعض التقدم فى مجالاته .

وليست هذه هى الفوائد الوحيدة من الأنساق الرمزية المنطقية . إذ يوجد فى كل علم مصطلحات وعبارات تقنية فنية متخصصة تعبر عن التصورات الخاصة بالعلم المشار إليه . وهذه المصطلحات التقنية الفنية فى الرياضيات قد وضعت فى الغالب فى أنساق رمزية مناسبة بواسطة علامات دالة على العمليات العقلية ( إيديوجرامات ) .

ومن أشهر الأمثلة الخاصة بالتصور concept الجديد المرموز إليه برموز عقلية ( إيديوجرامية ) خاصة هو العلامة الدالة على الصفر فى الحساب ، إذ كانت تخلو علامات الترقيم الحسابية فى اليونانية واللاتينية من رمز يشير إلى « الصفر » وأدى ذلك بالتالى إلى أن بعض عمليات الحساب البسيطة مثل :

— ٦٠٣٢ × ٥٤

— ٢٤٢٥ ÷ ٢٥

وهى مما يستطيع أداءه اليوم تلميذ المدرسة فى العاشرة من عمره . . . هذه العمليات البسيطة كانت تتطلب حينذاك مقدرة رياضية ذات شأن ، وقدراً كبيراً من العمل والجهد . وعلينا أن ننظر فقط فيما كان يئول إليه حساب الرياضيات لو لم يتوافر لنا بعض العلامات والرموز الخاصة مثل علامات الضرب والطرح والترقيم وعلامات التفاضل وما إلى ذلك . فذلك يرينا مدى أهمية الرموز العقلية الخاصة ( الإيديوجرامات ) فى تمثيل عمليات الحساب الرياضى . وسوف نحتاج فى المنطق أيضاً إلى رموز تمثل العمليات المنطقية بالإضافة إلى المتغيرات التى وردت آنفاً .

### ٣ — الصورة المنطقية

قلنا ما فيه الكفاية عن استخدام الرموز فى المنطق لا من أجل إظهار التحذلق وحسب بلغة رمزية نترجم إليها كل مادة منطقية نتداولها وإنما على العكس من ذلك استجابة لضرورة وجود مثل هذه اللغة لدينا من أجل فهم المنطق وتطوره . ولا بد أن نرجع الآن إلى موضوع هام جدًّا وردت إشارة عابرة إليه فى الفقرة السابقة وهو الصورة المنطقية .

يعدّ التمييز بين المادة التى يصنع منها الشىء وصورته أو شكله أو هيئته تمييزاً مألوفاً للحس العادى . فالمثال يستطيع أن يقوم بنحت تمثال نصفى من الطين أو الرخام أو الخشب أو أى مادة تشكيلية أخرى . والصورة أو الشكل الذى يسعى المثال لكى يفرضه على المادة الموجودة بين يديه هو هو فى كل حالة . أما المادة فتختلف . وبالمثل يمكن أن تكون المادة هى هى فى حين تتخذ أشكالا وصوراً مختلفة . وقد تصاغ قطعة من الرصاص وتشكل على أى نحو نريده تحت تأثير الحرارة والضغط . وقد يستحيل الماء إلى ثلج أو إلى بخار عن طريق تغيير الحرارة .

وفكرة الصورة المنطقية مجرد امتداد بالتنـــاظر أو بالاستعارة لهذه الفكرة العادية [1] .

ويعدّ مثل هذا الامتداد فى التشبيه لفكرة الصورة أو البناء الهيكلى مألوفاً من ضروب السياق الأخرى التى ترد فيها . إذ جرت العادة أن يتعلق الكلام بقطعة موسيقية فى صورة سوناتا ، أو بشعر فى صورة قصيدة غنائية بحيث تمتد فكرة الصورة أو تعمم لكى يتم تطبيقها على الأشياء الأخرى غير المادية . وبالمثل نقوم بتطبيق تصور « البناء الهيكلى » الذى يستخدم أصلا فيما يتعلق بالأشياء المادية مثل الأبنية أو الأنظمة على الوحدات التى لا تخضع للتفكير كمادة عندما نتحدث عن « بناء المجتمع » أو عن « بناء العقل اللاشعورى » .

إذن فنحن لا نعد التصور بغير وجه حق عندما نتكلم عن الصورة المنطقية أو البناء ، فالبناء ، أو الصورة أو الهيئة الخاصة بالشيء تتكون عن طريق وضع الأجزاء معاً حسب العلاقات المتبادلة بين الأجزاء . ولذلك نستطيع الكلام عن الصورة المنطقية الخاصة بالحكم أو بأى مجموعة من الأحكام المكونة للبرهان ، وعندئذ نكون قد عمدنا إلى تمييز الصورة أو البناء الخاص بالحكم أو الخاص بالبرهان من مادته أو مضمونه . ففى الأمثلة رقم ( ١ ) ، ( ٢ ) فى الفقرة الثانية ( السابقة ) كانت الحدود ( المجتمعات الرأسمالية ) و ( المجتمعات المستقرة ) و ( الديمقراطيات ) من ناحية و ( الزنوج ) و ( البابوات ) و ( المسلمون ) من ناحية أخرى تقوم بإبلاغ مضمون البرهان أو مادته . أما العبارة :

( لا أحد فى « أ » هو « ب »

---

( ١ ) يفضل أن يفهم الطالب فكرة أرسطو عن المادة والصورة وفكرة الفن الدقيقة فى التفرقة بين الشكل الخاص بالتمثال ومادة التمثال قبل أن يتقدم إلى هذه النقطة لأن تفرقة المناطقة بين صورة العبارة ومادتها هو امتداد لنفس الفكرتين . ( المترجم )

وبعض « أ » هو « ج »

إذن ليس بعض « ج » هو «ب» )

هذه العبارة لا تعطينا سوى صورة البرهان عن طريق إظهار العلاقات بين الأجزاء المكونة لهذا البرهان . وسوف نرى فى الفصول الأخيرة من هذا الكتاب كيف نهتم ونعنى فى المنطق بصورة البراهين فقط لا بمادتها أو مضمونها . وذلك واحد من الأسباب التى تجعلنا نستغنى عن الألفاظ التى تشير إلى المضمون ونذهب إلى وضع المتغيرات محلها .

وسوف نرى أن موضوع الفقرة السابقة المتعلق باستعمال الرموز فى المنطق مرتبط ارتباطاً وثيقاً بموضوع الصورة المنطقية. ومن أولى فوائد الترقيات أو العلامات الرمزية الجيدة فى المراحل التمهيدية لدراسة المنطق أنها تعمد إلى فصل الصورة المنطقية من المادة التى تحملها وإلى إبرازها أو إظهارها بوضوح . ومن فوائد المنطق الرمزى ومميزاته التى يتميز بها الآن على حالته فى الماضى عندما كان لا يزال تقليديًّا متخلفاً هو أنه يضم جداول رمزية أكثر كمالا . ومن شأن هذه الجداول الرمزية أن تعيننا على عرض الصور المنطقية الخاصة بالبراهين التى لم يستطع المنطق الأرسطى أن يحتوى عليها أو يضمها بين دفتيه . ( بل إن برهاناً بسيطاً مثل قولنا : إذا كانت لندن أكبر من باريس وباريس أكبر من روما . . . . إذن لندن أكبر من روما . . . مثل هذا البرهان لم يكن يمكن إدماجه وإذابته فى الصور النموذجية الخاصة بالمنطق التقليدى ) .

ولكن لماذا ينبغى أن يهتم المناطقة بالصور المنطقية ؟ والجواب عن ذلك هو أن صحة البراهين تتوقف على صورها المنطقية . وبوصفنا مناطقة نجد أنفسنا مهتمين خاصة بالصحة والسلامة المنطقية .

وقد تبدو هذه الإجابة عجيبة لأول وهلة . إذ قد يبدو أن الهدف من

الاستدلال والجدل ينحصر فى بلوغ نتائج صادقة بحكم أن الاهتمام الرئيسى للمناطقة ينصب على الصدق أكثر مما ينصب على الصحة والسلامة فى الأداء المنطقى Validity .

غير أن طول التفكير يجعلنا نكتشف أنه يوجد شرطان ضروريان من أجل ضمان صدق النتائج فى أى عملية من عمليات الاستدلال :

**أولا** : يجب أن يكون البرهان أو المقدمات ( التى نبنى عليها استدلالاتنا ) صادقة .

**ثانياً** : يجب أن تكون الاستدلالات نفسها صحيحة أو سليمة (أو صالحة ) على حد قولنا فى بعض الأحيان . ومن بين هذين الشرطين لا يستطيع المنطق أن يضمن سوى الشرط الثانى أن صحة وسلامة الاستدلالات نفسها . وذلك لأن صدق تلك القضايا التى لا يتم استنباطها صورياً من قضايا أخرى ينبغى أن يتأكد بوسائل خارج نطاق المنطق الصورى .

ولما كان فصل مسألة الصدق على هذا النحو من مسألة الصحة والسلامة المنطقية يبدو شيئاً غريباً . . . . كان مما يستحق التأكيد هنا أن بين هاتين المسألتين ارتباطاً ضئيلا جداً .

ومن الواضح أنه فى حالة وجود أدلة غير صحيحة لا يكون هناك ارتباط ضرورى بين صدق المقدمات أوكذبها وصدق النتيجة المستخلصة من تلك المقدمات أوكذبها . وقد تؤدى المقدمات والنتيجة إحدى الحالات الأربع الممكنة :

| | |
|---|---|
| صادق | صادق |
| صادق | كاذب |
| كاذب | صادق |
| كاذب | كاذب |

ولعل ذلك هو السبب فى أن الأدلة غير الصحيحة لا تكون ذات جدوى ولا تكسب الاهتمام ، غير أن حالة الأدلة الصحيحة لا تختلف كثيراً لأول وهلة ؛ إذ لا تعدو واحدة فقط من بين الحالات الأربع السابقة الممكنة فيما يتعلق بالصدق والكذب فى المقدمات والنتائج . . . لا تعدو واحدة فقط من بينها أن تكون مستحيلة ، وهى الحالة التى تصدق مقدماتها وتكذب نتائجها . ويمكن أن تحدث فيما عدا ذلك أية حالة من الحالات الثلاث الأخرى . وقد يبدو من غير المقبول أن نقيم استدلالا سليماً من مقدمات كاذبة إلى نتائج صادقة . غير أن البرهان القادم يمثل برهاناً صحيحاً صحة تامة :

— كل أباطرة الرومان كانوا رؤساء للولايات المتحدة الأمريكية .

— وكان لينكولن إمبراطوراً رومانياً .

— إذن كان لينكولن رئيساً للولايات المتحدة الأمريكية .

فها هنا النتيجة صادقة برغم كذب كل من المقدمتين وسلامة البرهان .

فالواقع أن الضمان الوحيد الذى توفره سلامة البرهان المنطقية هو أنه إذا كانت المقدمات فى البرهان السليم صادقة كانت النتيجة أيضاً بالتأكيد صادقة . وحيثما لم تكن المقدمات صادقة لا نعرف إذا كانت النتيجة صادقة أو كاذبة حتى لو تأكدنا من سلامة البرهان وصحته .

وعلى ذلك لا يصرف المنطق اهتمامه مباشرة إلى صدق الوقائع الواردة فى الأحكام حتى إذا كانت تلك الأحكام مقدمات أو نتائج للأدلة والبراهين . وإنما يصرف المنطق اهتمامه إلى الصدق بطريق غير مباشر فقط بقدر ما يكون ذلك الصدق مترتباً على سلامة البرهان الذى قد يؤدى صدق مقدماته إلى

صدق نتيجته[١]

وعلى ذلك سنعنى فى الفصول القادمة بمناهج اختبار صحة صور البرهان المختلفة ، وستنطوى هذه المناهج على الالتفات أساساً إلى البناء أو الهيكل المنطقى أو الصورة المنطقية الخاصة بالبراهين من وجهة النظر التى تقرر أن صحة البرهان المنطقية تعتمد وتنبنى على شروط أو ملامح معينة فى صورته المنطقية . وسيكون من الملائم فى سبيل تجريد مادة البرهان والانشغال بالصورة المنطقية وحدها أن نأخذ فى تمثيل كل البراهين من نوع معين عن طريق ترقيم رمزى مناسب أو وضع علامات ورموز مناسبة حتى تستوى الملامح الخاصة بالهيكل البنائى وتخضع للاختبار .

...

فى هذا كله سينصب اهتمامنا على التطبيق العملى للمنطق الرمزى .

غير أنه من الضرورى أن نراعى أن المنطق شأنه شأن أى علم آخر لا يدرس أولا وقبل كل شىء لأسباب متعلقة بنفعه[٢] . إذ أن تطور التقنيات المنطقية تطوراً يعلو على الضرورة من شأنه أن يوفر لنا معياراً لاختبار صحة الصور الاستدلالية ، ويرجى لذاته على نحو ما يرجى تطور الرياضيات البحتة لذاته . وتوجد أفرع كثيرة فى الرياضيات لم يكتشف لها بعد تطبيق عملى فى مسائل الهندسة الآلية أو العلوم الطبيعية أو الإحصاء . وهذا صحيح أيضاً فى علم المنطق الرمزى وهو أكثر منها جدة وحداثة . غير أنه حتى الأفرع التى نمت وتطورت أصلا لأهميتها الكامنة فيها قد تبينت قدرتها على التطبيق العملى وعلى النفع فى معظم

---

(١) وسوف نرى فيما يقبل من الصفحات أن صحة البرهان مرتبطة ارتباطاً قوياً جداً بالصدق المنطقى لبعض الأحكام . وإن كان هذا جانباً من موضوع آخر .

(٢) يمكن مراجعة فوائد المنطق الرمزى بكتاب أصول الرياضيات كما يمكن تأمل وظائفه النظرية والكتاب لرسل ترجمة الدكتورين محمد مرسى أحمد وأحمد فؤاد الأهوانى ص ٤٢ وما بعدها حيث يشير إلى أنه ضرورى لفهم الرياضة نفسها . ( المترجم ) .

الميادين نفعًا أكيداً ابتداء من إنشاء الآلات الحاسبة حتى تخطيط المجالات الكهربية .

وسنعنى فى هذا الكتاب بالأجزاء العملية الأكثر أولية وتقليدية فى الموضوع . ولكن لا ينبغى أن ننسى أن المنطق موضوع سريع التطور حاليًّا ، وأن الكثير من مجالاته المعرفية الشاسعة غير المطروقة لا يزال قائماً وراء حدوده الحالية .

## ٤ — الاستدلال والاستلزام

نظرنا فى بعض الأمثلة الخاصة بالبراهين الصورية البسيطة فى الفقرة الثانية من هذا الفصل من أجل تقديم فكرة الصورة المنطقية .

ولكى نسوق على ذلك مثلا من تلك الأمثلة نعيد النظر فى المثل رقم ( ١ ) الذى كانت عبارته كالآتى :

( ١ ) لا توجد مجتمعات رأسمالية مستقرة وبعض المجتمعات الرأسمالية من الديمقراطيات . إذن فبعض الديمقراطيات غير مستقرة .

وكان فى إمكاننا صياغة هذا التعبير على النحو الآتى كذلك :

(١أ) إذا لم تكن المجتمعات الرأسمالية مستقرة وكانت بعض المجتمعات ديمقراطية إذن فبعض الديمقراطيات غير مستقرة .

غير أننا لا نلبث أن نلاحظ اختلافاً بين (١) ، (١أ) ويكاد يكون الاختلاف كبيراً . ذلك أن (١أ) حكم منطقى ينص على أنه « إذا » توافرت شروط معينة ترتب على ذلك بعض النتائج . ولا يشير هذا الحكم المنطقى بحال من الأحوال إلى ما إذا كانت هذه الشروط المشار إليها فى العبارة المسبوقة « بإذا » تتوافر فى الواقع الحقيقى أم لا .

فالمثل الأول (١) من ناحية مختلف جدًّا ؛ إذ أن مقدماته تقيم أحكاماً

تقريرية معينة ، وتسوق هذه الأحكام التقريرية بدورها إلى إيجاد حكم تقريرى آخر كنتيجة منطقية مترتبة على الأحكام السابقة . أعنى أنها تنشئ الواقعة الواردة فى النتيجة .

وعلى ذلك لكى نجد مسوغاً إلى تقرير الحكم رقم (١) نكون مضطرين إلى معرفة أن الصورة المنطقية للبرهان لا تضمن فقط أن النتيجة تترتب على المقدمات ، وإنما نكون مضطرين أيضاً إلى معرفة أن المقدمات صادقة . وكما رأينا من قبل تعد هذه النقطة الأخيرة الخاصة بشرطية صدق المقدمات غير ذات علاقة بمسألة السلامة المنطقية .

وهكذا نجد من ناحية أخرى تسويغاً فى تأكيد (١ أ) بدون اى حكم مسبق فيما يتعلق بمسألة الصدق أو الكذب فى المقدمات . وأشد المعارضين للماركسية مثلا يجد نفسه قادراً على أن يؤيد الحكم (١أ) فى حين لا يقوى على تأييد الحكم رقم (١) . ويستطيع تأييد الحكم رقم (١أ) لأنه سيكون بصدد قول لا يعنى أكثر من أنه » .

« إذا صدقت المقدمات

كانت النتيجة إذن صادقة .

ولكى نبرز هذا التمييز الهام جرت العادة بتسمية البراهين من نوع (١) باسم استدلالات فى حين يطلق على الأحكام من نوع (١أ) اسم استلزامات . فإذا أقمنا استدلالا حكمنا فوراً بصدق المقدمات بمجرد تأكيدها . ونجد أنفسنا بالتالى قادرين على تأكيد النتيجة بناء عل صدق المقدمات وعلى صحة البرهان المنطقية، على حين لا نلزم أنفسنا إطلاقاً بصدق المقدمات عندما نقوم بعملية استلزام .

وسيكون من الصواب الحاسم فى أى كتاب تعليمى متداول للمنطق إعداد كل

الأمثلة والنماذج فى صورة استلزامات implications ما دمنا لا نعبأ بصدق مادة الكلام ومضمونه فى المقدمات وإنما نهتم فقط بصحة صورة التعبير المستخدم صحة منطقية . وبرغم ذلك فمن المحتمل أن يكون التعبير عن الأمثلة المنقطية كبراهين أكثر شيوعاً . ونعنى بالتعبير عنها كبراهين أنها تكون فى صورة استدلال لأن معظم براهيننا فى حياتنا العادية يقصد بها عادة تحقيق صدق النتيجة ، ولا بد أن تصاغ وتحسب على هذا النحو . ولهذا سوف نضع أمثلتنا هنا كاستدلالات ما دام ذلك هو الأمر الأوفق والملائم . غير أنه يجب أن يراعى القارئ ذلك التمييز بين الاستدلال والاستلزام حتى لا ينشأ عن ذلك أى خلط[١] .

## مراجع هذا الفصل

لا يوجد فى اللغة الإنجليزية تاريخ للمنطق يشرح تطور المنطق الرمزى . غير أن كلا من بوشنسكى (٣) ولوكازيفيتش (٢١) يفيدان فائدة كبيرة فيما يتعلق بتاريخ المنطق المتقدم على هذا العصر فى علاقته بالمنطق الحديث . ويربط بينر (٤) بعض التطورات فى منطق العصور الوسطى بالمنطق الرمزى الحديث . غير أنه لا يعنى بغير التلخيص المجمل . ويجد المرء التناول الكافى للمنطق القياسى القديم لدى كينز (١٧) ويوجد تحليل واف مبسط لفكرة الصورة المنطقية فى كتاب لانجر (١٩)

ملحوظة : الترقيم الوارد فى ثبت المراجع بنهاية كل فصل يشير إلى الترقيم الخاص بالمراجع فى نهاية الكتاب باللغة الأصلية .

---

(١) يلاحظ أن فكرة الاستلزام هى أهم خاصية فى الرياضة غير الإقليدية ، فى حين يعد الاستدلال فى حد ذاته أهم خصائص الرياضة الإقليدية . وقد حاول المنطق الحديث والرياضة الحديثة أن يكونا إقليديين ولا إقليديين فى آن معاً . وكل هذه المحاولات هى التى أنتجت المنطق الرمزى الحديث . (المترجم) .

## الفصل الثانى

# حساب القضايا

### ١ – القضايا وعلاقاتها

يعرف حساب القضايا بأسماء أخرى مثل الحساب القضوى أو حساب العبارات . ويعد حساب القضايا بمثابة جزء أساسى من المنطق أو نقطة البداية لدراسة المنطق الرمزى .

والمفهوم من لفظة قضية أى عبارة يجب أن تكون إما صادقة أو كاذبة ولا يمكن أن تكون صادقة وكاذبة فى آن معاً . فإذا قيل مثلا :

الزرنيخ سام

٢ + ٧ = ٩

هزم نابليون فى ووترلو

كانت هذه كلها قضايا . وعلى ذلك نحن نعنى بالقضية نفس المقصود بالمصطلح النحوى « العبارة الإخبارية » .

ولا تلبث أن تثور مشكلات وصعوبات فلسفية كثيرة بمجرد محاولتنا تحديد تصور القضية على نحو أكثر دقة ووضوحاً . غير أن أغراض المنطق تخول لنا أن نتجاهل هذه الصعوبات وتسمح لنا بتخطى كل العقبات .

والقضايا فى هذا الفرع من المنطق هى الوحدات الأساسية . تقوم القضايا فى المنطق الرمزى مقام الوحدات الأساسية . أى أننا بعبارة أخرى لن نسعى لتقسيم هذه الوحدات إلى أجزائها المكونة لها على نحو ما يلزم عند اختبار صحة بعض أنواع البراهين .

لنفرض مثلا أننا بصدد فحص صحة برهان من النوع التالى :

١ ـــ كل المهن الخطرة ذات مرتبات باهظة .

العمل فى المناجم مهنة خطرة .

إذن فالعمل فى المناجم ذو مرتبات باهظة .

وهذا بطبيعة الحال برهان صحيح وسليم . غير أن سلامته أو صحته لا تتضح إلا بتقسيم أو تحليل القضايا التى يتألف منها البرهان إلى حدودها وأجزائها التى تتكون منها . فهو برهان صحيح أو سليم بفضل بعض العلاقات الماثلة بين الحدود « العمل فى المناجم » و « المهن الخطرة » و « المهن التى تتكلف مرتبات باهظة » .

وفى استطاعتنا أن نعبر عن صورة هذا البرهان بعد تجريدة من مضمونه على النحو الآتى :

٢ ـــ كل أ هى ب

ولكن س هى أ

إذن س هى ب

ولننظر فى البرهان القادم الذى يشبه المثل رقم ( ١ ) شبهاً سطحيًا :

٣ ـــ إذا كان العمل فى المناجم مهنة خطرة كانت مرتباته باهظة .

والعمل فى المناجم مهنة خطرة .

إذن فلابد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة .

ويلاحظ هنا أن المضمونين فى البرهانين متطابقان تطابقاً هويًّا أو متكافئان على حد تعبيرنا العادى ، وأن النتيجة هى هى فى كلتا الحالتين . غير أنه يوجد اختلاف هام جدًّا فيما بينهما . ففى رقم ( ٣ ) ليس علينا أن نقوم بتمزيق القضايا الداخلة فى تكوين البرهان من أجل إثبات صحة هذا البرهان وسلامته . ذلك أن البناء المنطقى أو الصورة المنطقية الخاصة بالبرهان يمكن أن يعبر عنها

إذا أحللنا (س) محل القضية « العمل بالمناجم مهنة خطرة » وأحللنا ( ص ) محل القضية « لابد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة » على النحو التالى :

٤ — إذا كان س
إذن ص
ولكن س
إذن ص

وهذه فى الواقع صورة سليمة وصحيحة للبرهان بغض النظر عن مضمون القضايا التى حلت محلها س ، ص . وسوف نعنى فى تناولنا لحساب القضايا بالبراهين التى تعد من هذا الصنف الثانى[1] .

ولن يشغلنا بأى حال مضمون القضايا وإنما سنعنى فقط بالمعالم الجوهرية المشتركة فى كل القضايا وهى إمكان الصدق أو الكذب . وسبق أن عرفنا طابع القضية المميز بأنه ينبغى أن يحمل قيمة واحدة فقط من بين القيمتين الخاصتين بالصدق والكذب . ويطلق عادة على الصدق أو الكذب فى القضية اسم قيمة الصدق وقيمة الكذب . وعلى ذلك فسوف نهتم بحساب القضايا القائم على قضايا ذات قيم صدق ، وكذلك بالطرق المختلفة التى تأتلف فيها هذه القضايا وما يترتب على تلك التآلفات . وقد يبدو هذا غامضاً الآن ، ولكنه سوف يتضح كلما تقدمنا فى الدراسة .

وبذلك نحن نبدأ من التصور البديهى للقضية الذى نجده فى الاستعمال

---

(١) هذه الصورة المنطقية هى أساس الاستلزام فى المنطق الرمزى وهى صورة سهلة بسيطة ولكنها كانت مصدر اكتشافات هائلة فى المنطق الجديد . وهذا الشكل نفسه هو ما عرفه العرب الأقدمون باسم قياس الاستثناء ( لوجود لكن بداخله ) انظر القضايا المعاصرة للفلسفة ص ٢٤٩ تأليف عبد الفتاح الديدى .

العادى . ونألف كذلك فى الكلام العادى فكرة أن القضايا قد تأتلف فى طرق مختلفة وأنها قد تكون منفية . إذ يمكن مثلا إدماج القضيتين « انخفضت دلالة مقياس الضغط الجوى (البارومتر) » « سوف تهب عاصفة » على النحو التالى :

٥ — إذا انخفضت دلالة البارومتر فستهب العاصفة .

٦ — إما أن تكون دلالة البارومتر قد هبطت أو أن العاصفة ستهب .

٧ — انخفضت دلالة البارومتر وستهب العاصفة .

وقد ترد منفية على النحو التالى :

٨ — ليست دلالة البارومتر منخفضة .

٩ — لن تهب العاصفة .

وسيتضح لنا فى التو أن القضايا المركبة رقم ( ٥ ، ٦ ، ٧ ) والقضايا المنفية ( ٨ ، ٩ ) يسرى عليها كذلك نفس تعريف القضية السابق . أو بعبارة أخرى تخضع هذه الأحكام كلها لواحدة فقط من قيمتى الصدق والكذب .

وإذا أهملنا المعنى أو المحتوى الخاص بهذه القضايا المركبة والقضايا المنفية أمكننا إحلال حروف هجائية محل العبارات الأصلية غير المركبة وغير المنفية . وبهذا نحصل على التعبيرات التالية :

١٠ — إذا كان س
إذن ص

١١ — إما س أو ص

١٢ — س ، ص

١٣ — لا س

١٤ — لا ص .

ويمثل هذه التعبيرات المركبة على أنحاء ودرجات شتى من التعقيد سننشغل أنفسنا فى حساب القضايا .

## ٢ ــ دالات الصدق

فكرة الدالة من الأفكار المألوفة فى الرياضيات الأولية[1] . ويقال إن العبارة دالة ذات متغير واحد أو جملة متغيرات إذا تحددت قيمة هذا التعبير فقط كلما اتخذ المتغير الواحد أو جملة المتغيرات قيمة محددة . مثال ذلك التعبير الآتى :

ى = ٣ س + ٢

فتكون ى دالة س لأن قيمتها تتحدد بمجرد تحديد قيمة المتغير س . فإذا كانت س تعادل الصفر كان قيمة ى تعادل ٢ . وإذا كانت س تعادل ٧ كانت قيمة ى تعادل ٢٣ . وإذا كانت قيمة س تعادل ــ ٤ كانت قيمة ى تعادل ــ ١٠ وهكذا إلخ . . .

وبالمثل فى التعبير التالى :

ط = ٢ س ــ ٤ ى + ٦

تكون ط دالة المتغيرين س ، ى . وإذا تحددت قيمة كل من المتغيرتين تحددت كذلك قيمة ط . وعلى ذلك فإذا أخذت س ، ى قيمة تعادل ١ صارت قيمة ط تعادل ٤ . وإذا كانت س تعادل ٣ وكانت ى تعادل ٤ كانت قيمة ط = ــ ٤ . وهكذا إلخ . . .

وتبين أن المنطق يستطيع أن يذهب فى استفادته من فكرة الدالة على النحو التالى . فقد رأينا أن كل قضية تأخذ إحدى قيمتى الصدق أو الكذب . ورأينا كذلك أن القضايا التى تكون مركبة أو منفية على نحو ما سبق هى أيضاً إما

---

(١) تعرف دالة القضية عندما نقرر أنها مكافئة لدالة قضية سبق التسليم بعدم إمكان تعريفها أو سبق تعريفها بدلالة خاصة بما لا يمكن تعريفه . والفكرة الأساسية هى دالة القضية وهى لا تفهم إلا باستخدامها . وهنا ى س دالة قضية فى حالة ما يكون لكل قيمة من قيم س ، ى س قضية تتضح وتتعين بناء على تعيين دلالة س أو قيمتها . (المترجم)

كاذبة أو صادقة . بل أكثر من ذلك أن الصواب أو الخطأ فى القضية المركبة أو المنفية يتحددان فقط بواسطة قيم الصدق الخاصة بتعبيراتها الأصلية . وذلك كما تتحدد القيمة العددية للدالة الرياضية البسيطة وفقاً للقيم الخاصة بالمتغيرات الجارية فى الدالة[١]

دعنا نأخذ مثلا من العبارة المركبة :

١ — الشمس ساطعة ودرجة الحرارة ٧٠ فهرنهايت .

وستكون العبارة رقم (١) صادقة فى حالة واحدة فقط وهى عندما تصدق العبارتان المكونة منهما . فإذا كانت إحداهما أو كلتاهما كاذبة فستكون (١) كاذبة . ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة على النحو الآتى : فلنمثل العبارات المكونة ( الشمس ساطعة ) و ( درجة الحرارة ٧٠ فهرنهايت ) بكل من س ، ص على التوالى واضعين فى تقديرنا أننا لا يعنينا ما تحمله العبارات المشار إليها من معان وإنما يعنينا فقط قيم الصدق الخاصة بها . إذن نستطيع أن نمثل توقف القيمة فى العبارة المركبة (١) على القيم الخاصة بالعبارات المكونة لها على نحو ما يلى :

| س | ص | س ، ص |
|---|---|---|
| صادقة | صادقة | صادقة |
| صادقة | كاذبة | كاذبة |
| كاذبة | صادقة | كاذبة |
| كاذبة | كاذبة | كاذبة |

(١) تقوم المتغيرات مقام أعداد فى الحساب وافتراضنا أنها أعداد يلزم عنه وجود الصيغة . ولكن عند صياغة قضايا الرياضة البحتة صياغة كاملة يكون للمتغيرات مجال غير مقيد أو مستوى لا محدود . فأى شىء يمكن أن يحل محل أى متغير من متغيراتها دون أن يؤثر ذلك . أما الثابت فيجب أن يكون شيئاً محدداً تحديداً مطلقاً ولا إبهام فيه على الإطلاق . فالثابت محدد أما ما لا يدل على شىء محدد بالذات فهو متغير . ( المترجم )

وعندئذ تكون العبارة المركبة ( س ، ص ) دالة الصدق بالنسبة إلى العبارات المكونة لها ( س ) ، ( ص ) لأننا إذا عرفنا القيم فى العبارات المكونة تحددت بناء على ذلك القيمة الخاصة بالعبارة المركبة . ويسمى المنهج الخاص بالجدول الذى يمثل هذا الارتباط بالصورة السالفة جدول الصدق . وسيكون من الواضح بطبيعة الحال أن جدول الصدق الماثل ينطبق على كل القضايا المركبة التى تكون القضيتان المكونتان لها متصلة بحرف العطف ( و ) ، ولا يقتصر الأمر على العبارة ( ١ ) وحدها التى اتخذناها مثلا عينياً .

وفى إمكاننا إقامة جداول صدق بقدر حاجتنا إلى تمثيل دالات صدق أخرى بنفس الطريقة . فمثلا يعد نفى أى قضية دالة صدق لتلك القضية كما يظهر من جدول الصدق التالى :

| س | لا ـ س |
|---|---|
| صادقة | كاذبة |
| كاذبة | صادقة |

## ٣ ـ جداول الصدق الأساسية فى حساب القضايا :

رأينا أن المادة الأساسية لحساب القضايا من نوعين :

**أولا** : حروف أبجدية مثل س ، ص ، ل وهكذا ( وأحياناً $س^{1}$ ، $س^{2}$ ، $س^{3}$ وهكذا ) تشير إلى القضايا . وتسمى هذه الحروف بوضعها ذاك فى حساب القضايا باسم المتغيرات أو متغيرات القضايا لأنها قد تشير إلى أى قضية دون أى اعتبار .

**ثانياً** : ألفاظ مثل « لا » ـ « و » ـ أو ـ « إذا كان . . . إذن » التى تربط بين متغيرات القضايا داخل تعبيرات دوال الصدق أو ما يسمى بالتعبيرات

المركبة مثل ( لا س أو ص ) أو ( إذا كان س إذن لا — ص ) التى تعتمد قيم الصدق الخاصة بها على قيم الصدق الخاصة بالقضايا المكونة لها . وهذه الألفاظ التى تقوم بالربط هى ما يعرف باسم « الثوابت المنطقية » .

ومن الملائم ( ومن المتفق عليه ) تمثيل هذه الثوابت المنطقية بواسطة رموز صناعية على النحو الآتى :

يشار إلى ( لا س ) بالعلامة (~ س )

ويشار إلى ( س و ص ) بالعلامة ( س . ص )

ويشار إلى (س أو ص ) بالعلامة ( س V ص )

ويشار إلى ( إذا كان س ، إذن ص ) بالعلامة ( س C ص )

ومن الملائم أيضاً من أجل كتابة جداول الصدق بتحديد موجز استخدام هذه العلامة ( T ) أو الترقيم ( ١ ) للإشارة إلى الصدق والعلامة ( F ) أو ( O ) للإشارة إلى الكذب . ونستطيع الآن أن نتعقب دوال الصدق الأساسية الخاصة بحساب القضايا واحدة واحدة مع استعمال هذه العلامات .

**دالة التناقض** The Contradictory Function

عند نفى أى قضية نحصل على قضية أخرى كاذبة إذا كانت القضية الأصلية صادقة ، ونحصل على قضية أخرى صادقة إذا كانت القضية الأصلية كاذبة . وعلى ذلك إذا كانت القضية التالية :

( توجد حيوانات الكنجارو فى أستراليا )

صادقة كانت القضية المنفية

( لا توجد حيوانات الكنجارو فى أستراليا )

أو ( من الخطأ أنه توجد حيوانات الكنجارو فى أستراليا )

كاذبة . . . . . . . .

وبالمثل إذا كانت القضية التالية :

( نيرون كان أول رئيس للولايات المتحدة الأمريكية )

كاذبة كانت القضية المنفية :

( نيرون لم يكن أول رئيس للولايات المتحدة الأمريكية )

أو ( من الخطأ أن نيرون كان أول رئيس للولايات المتحدة الأمريكية)

صادقة . . . . .

ويمكن إيجاز هذه الوقائع بطريقة ملائمة فى جدول الصدق التالى :

| س | ~ س |
|---|---|
| ١ | ٥ |
| ٥ | ١ |

وعلى ذلك فإذا وضعنا علامة النفى ( ~ ) فى مقدمة أى قضية تغيرت قيمتها من ( ١ ) إلى ( ٥ ) أو من (٥) إلى ( ١ ) . وبالتالى فإذا قمنا بنفى أى قضية منفية حصلنا على القضية الأصلية : أعنى أن إثبات ( ~ ~ س ) يكون إثباتاً للقضية ( س ) .

## دالة الوصل

سبق أن تناولنا دالة الوصل بصدد العبارة رقم ( ١ ) فى الفقرة الثانية . ويمكن وضع جدول الصدق الخاص بالدالة على النحو التالى :

| س | ص | س . ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ١ | ٥ |
| ٥ | ٥ | ٥ |

## دالة الفصل The Disjunctive Function

دالة الصدق الخاصة بالفصل فى القضايا هى عبارة عن قضية مركبة يوصل فيها بين قضيتين ( أو أكثر ) فتصبحان قضية واحدة بواسطة الأداة ( أو ) . والأداة ( أو ) من الأدوات الغامضة فى كثير من اللغات ولها فى اللغة الإنجليزية على الأقل معنيان متميزان ، وعلى ذلك فقبل أن نضع جدول الصدق لدالة الفصل يتعين علينا أن نقرر أى معنى من المعنيين سنقتصر عليه من أجل تحقيق الأغراض المنطقية .

إذا قلت مثلا :

( سيكون حزب المحافظين أو حزب العمال فى الحكم بعد الانتخابات ) فسيكون المقصود بوضوح من ..اء هذا القول أن هذا الحزب أو ذاك سيتسلم السلطة والحكم ولكن ليسا كليهما .

ومن ناحية أخرى إذا قيل ( اما محمد أو سعاد فسوف يلتقى بك عند المحطة ) فلن تصاب بالدهشة أو تعتقد أن المبلّغ كان يقصد التغرير بك إذا كان كل من محمد وسعاد على المحطة فى انتظار لقائك .

ومن هنا قد تعنى ( س أو ص ) معنى وحيداً انفرادياً مؤداه ( أما س أو ص ولكن ليس كليهما معاً ) أو قد تعنى معنى تضمينياً آخر مؤداه ( أما س أو ص ومن الجائز كلاهما ) .

وقد رئى أنه من الملائم فى سبيل تحقيق أغراض المنطق التمسك بالمعنى الثانى من المعنيين السابقين وتفسير الأداة ( أو )بالتالى تفسيراً يستأثر بالمعنى التضمينى . وعلى ذلك يصبح جدول الصدق بالنسبة إلى دالة الفصل على النحو التالى :

| س | ص | س V ص |
| --- | --- | --- |
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ١ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ٥ | ٥ |

وبذلك تكون القضية المركبة ( س أو ص ) صادقة فى كل حالة ما عدا الحالة التى تكون فيها كلتا القضيتين المكونتين كاذبتين .

**دالة الاستلزام The Implicative Function :**

لا تزال واحدة من الثوابت المنطقية المشار إليها فيما سبق تستوجب المناقشة . ذلك أن دالة الاستلزام « إذا كان س . . . إذن ص » دالة هامة جداً فى المنطق[١] . ولكن مهمة بناء جدول صدق خاص بها يبرهن عليها بوصفها دالة صدق للقضايا المكونة لها ليست بالبساطة التى شهدناها فى الحالات السابقة .

وسبب ذلك هو أن استخدامنا العادى فى الكلام لعبارة « إذا كان . . . إذن » بالإنجليزية لا يتصل بجداول الصدق الخاصة بالقضايا المترابطة بواسطة هذه العبارة .

أما فى حالة الدوال الثلاث السابقة فتعد الاستعمالات العادية فى حياة كل يوم للألفاظ ( لا ، و ، أو ) بوضوح تام دالات صدق . وبذلك يمكننا بناء

( ١ ) ترجع أهمية الاستلزام على هذا النحو إلى أن الرموز هنا تشير عادة إلى قضايا فهى تعمد إذن إلى التعبير عن قضايا كاملة . خذ مثلا : إما أن يكون كل إنسان كائناً حياً أو لا تكون الحيوانات كائنات حية — ولكن من المستحيل تكون الحيوانات ليست كائنات حية — إذن فكل إنسان كائن حى . وهذه يمكن صياغتها رمزياً على النحو التالى : إما س أو ص — ولكن لا ص — إذن س . وهذا شكل آخر غير الشكل المعروض هنا ولكننا نستبق الإشارة إليه لتوضيح صورة القضية وبيان دورها . ( المترجم )

جداول الصدق الخاصة بهذه الثوابت المنطقية عن طريق الإشارة إلى معانى الحياة اليومية الخاصة بما يقابلها من الألفاظ .

فكيف إذن نقيم جدول الصدق الخاص بدالة الاستلزام بدون تحريف للمعنى العادى الخاص بعبارة .

« إذا كان . . . إذن » . . . . ؟

من حسن الحظ أننا نستطيع التعبير عن الثابتة المنطقية ( إذا كان . . . إذن ) بواسطة ثابتتين منطقيتين سبق أن أنشأنا جدولى الصدق الخاصين بهما . ذلك أن معنى التعبير ( إذا كان . . إذن ) معادل من حيث جوهره لتعبير ( إما لا س أو ص ) .

فالعبارتان :

١ — إذا ارتفع سعر الذهب ازداد الإفلاس .

٢ — إذا هاجمت أمريكا روسيا ، تهدمت أوربا .

يمكن التعبير عنهما على التوالى بغير أدنى تغيير فى المعنى على النحو التالى :

٣ — إما ألا يرتفع سعر الذهب أو سيزداد الإفلاس .

٤ — إما ألا تهاجم أمريكا روسيا أو ستتهدم أوربا .

ولا يعدو الاختلاف بين صيغتى التعبير أن يكون بلاغياً برغم أن الصيغة الأخيرة أقل اعتياداً من الأولى .

وعلى ذلك فنحن فى وضع يسمح لنا ببناء جدول الصدق الخاص بدالة الاستلزام بطريق غير مباشر إذا أقمنا جدول فصل القضية المنفية والقضية المثبتة . ويمكننا تحقيق ذلك بالطريقة التالية :

| س | ~ س | ص | ~ س V ص |
|---|---|---|---|
| ١ | ٥ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ١ | ١ | ١ |
| ٥ | ١ | ٥ | ١ |

وبهذا يتحقق جدول الصدق الخاص بالقضية س ⊃ ص على النحو التالى :

| س | ص | س ⊃ ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ٥ | ١ |

ويلاحظ أن هذا الاستعمال للثابتة ( إذا كان — إذن ) المعروفة كدالة صدق للقضية ( س ) والقضية التابعة لها ( ص ) أكثر اتساعاً من الاستعمال اللغوى العادى فى التعبير ، فالاستخدام العادى لعبارات الاستلزام فى اللغة العادية يتجلى فى تقرير ارتباطات علّية أو ارتباطات ضرورية بين واقعة وأخرى مثل قولنا :

( إذا ارتفعت حرارة قطعة من الحديد ازداد حجمها ) .

فهنا يكون قصدنا أن نستلزم أن كلا من القضيتين الأولى والتابعة صادقة ، وأن صدق الأخيرة ينبنى على صدق الأولى أو يكون لازماً بناء على صدق الأولى.

ويناظر هذا الاستخدام جداول الصدق الأولى الواردة فيما سبق .

ولكن يوجد استخدام اصطلاحى لعبارة الاستلزام المناظرة لجداول الصدق الأخيرة ، فعندما يقول المدرس لأحد تلاميذه :

( إذا نجحت فى الامتحان فسآكل قبعتى ) .

فإنما يكون قصده تضمين الكذب فى كلتا القضيتين الأولى والتابعة مهما يكن صدق التأكيد الوارد فى عبارة الاستلزام . ولكن ذلك لا يعنى أكثر من التعبير البلاغى عن الإنكار الشديد للقضية الأولى .

وبرغم ذلك فهما تكن هذه التماثلات بين تفسير دالة الصدق فى عبارات ( إذا كان — إذن ) واستخدامنا العادى فى الحديث لمثل هذه العبارات فإن جدول الصدق الخاص بالثابت المنطقى ( ⊃ ) يبدو ذا مفارقات عديدة . ويتلو مثلا عن تعريف الثابتة المنطقية ( إذا كان — إذن ) على ذلك النحو أن القضية الصادقة تكون لازمة بناء على أى قضية صادقة أو كاذبة ، وأن القضية الكاذبة تستلزم أى قضية صادقة كانت أو كاذبة[1] .

ويبدو بطبيعة الحال من المغالطة الجسيمة اعتبار الأمثلة التالية استلزامات حقيقية :

٥ — إذا كان بروتس قد قتل قيصر كانت أفريقيا مليئة بالأسود .

٦ — إذا كان قيصر قد قتل بروتس كانت أفريقيا مليئة بالأسود .

٧ — إذا كان نيرون قديساً مسيحيًّا كانت ٥ + ٧ = ١٦

وتبدو هذه الاستلزامات أمام التفكير البسيط العادى كأنها ليست صادقة ولا كاذبة وإنما مجرد عبث بغير معنى . وسبب ذلك أن الاستعمال العادى لقولنا : ( إذا كان — إذن ) فى ربط العبارات على صورة استلزامات يفترض مقدماً أن معانى العبارات التى ارتبطت على ذلك النحو ( وليس قيم الصدق

---

( ١ ) من بين كل المعانى المعروفة يقتصر الثابت المنطقى [ ⊃ ] على الإشارة إلى معنى : إذا كان — إذن . وبمثابة « الوصل الموحد » الأوحد والذى لا يحتوى على « ليس » . وهو أبسط الأشكال التحليلية . خذ مثلا دلالة صيغة التحليل فى قولنا : ( س هو الولد الأصغر ) تستلزم ( س له أخ ) بعد تحويله إلى الشكل الآتى : س الولد الأصغر ⊃ س له أخ . ( المترجم )

الخاص بها ) هى التى تحدد ما إذا كان الاستلزام صادقاً أو كاذباً . وهذا صحيح . غير أنه ليس مسوغاً كافياً لرفض التناول لمنطق القضايا من وجهة نظر دوال الصدق . ولعله مسوغ كاف لعدم استخدام لفظة ( استلزام ) الخاصة بعبارات ( إذا كان — إذن ) عند تفسيرها فى معنى من معانى دوال الصدق .

والواقع أن العادة جرت الآن أكثر من أى وقت مضى لإعطاء هذه العلاقة اسم ( الاستلزام المادى )[1] من أجل تمييزها من أى استعمال عادى فى الحديث للقضية ( إذا كان — إذن ) . وفضلا عن ذلك فالتفسير الخاص بدالة الصدق لقضية ( إذا كان — إذن ) هو تفسير كاف تماماً فى المنطق . وسنرى أن المفارقات الظاهرة إنما تصدر فقط بسبب المعنى الخاص بدالة الصدق الذى يكون أكثر اتساعاً من المعنى الدارج فى المحادثة . ولكونه أكثر اتساعاً فإنه يشتمل عليه أيضاً . بل يصلح هو نفسه للاستخدام العملى . وهذا يكفى لتسويغ غرضنا فى إثبات جدة هذا الاستخدام . وسنأخذ بالتالى جدول الصدق السابق على أنه تعريف للطريقة التى يعمل بها الثابت المنطقى ( ⊃ ) فى حساب القضايا.

## ٤ — العلاقات بين دوال الصدق :

رأينا إذن أنه من الممكن تعريف الثوابت المنطقية لدالة الاستلزام ( ⊃ ) فى حدود كل من ( ~ ) ، ( V ) .

ومن الممكن أيضاً تعريف كل من ( V ) ، ( · ) فى حدود من الثوابت المنطقية الأخرى . غير أن ( ~ ) لابد أن ينظر إليها كفكرة بدائية نقبلها كشىء لا يمكن تعريفه فى حدود أى ثوابت أخرى من هذا القبيل .

---

( ١ ) المادى هنا معناه الاستلزام الذى ينشأ عن مادة الكلام . ومادة الكلام هى معناه . والمفروض أن يكون الاستلزام المادى هنا هو الاستلزام المعنوى لأنه يعبر عن استلزام معنى لمعنى أو أن أحد المعانى يلزم عنه معنى آخر . ( المترجم )

ولكننا قد نأخذ جدول الصدق الخاص بدوال الصدق المذكورة آنفاً بوصفه « تعريفاً » لتلك الدالة وبوصفه قاعدة أيضاً لاستخدام الثابتة المنطقية الواقعة فى الدالة .

وعلى ذلك فالجدول التالى :

| س | ص | س ⊃ ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ٥ | ١ |

عبارة عن تعريف لدالة الاستلزام وقاعدة لاستخدام ( ⊃ ) داخل حساب القضايا .

ولما كان جدول الصدق الخاص بإحدى الدالات المعينة يقوم بمثابة تعريف لتلك الدالة بعينها فأى دالة أخرى ستكون معادلة لها إذا حازت نفس جدول الصدق بل يمكن إحلالها محلها فى كل الأغراض والمناسبات المنطقية ، وبهذا رأينا أن ( ∼ س V ص ) تكافئ (س ⊃ ص) من حيث حيازتها لنفس جدول الصدق. ومن هنا يمكن النظر إليها كطريقة أخرى لتعريف دالة الاستلزام برغم أن التعريف هنا من نوع آخر بحكم وضعه فى حدود ثوابت منطقية أخرى لا فى حدود القيم الخاصة بالصدق أو الكذب .

وبالمثل يمكن التعبير عن ( س ⊃ ص ) فى حدود ( ∼ ) ، ( • ) على النحو التالى :

[ ∼ ( س • ∼ ص ) ]

مثال ذلك أن قولنا :

( إذا وضع هذا المعدن فوق النار تمدد )

هو نفس قولنا :

( من الخطأ أن هذا المعدن سيوضع على النار ولا يتمدد )

ويكون جدول الصدق كما يلى :

| س | ص | ــ ص | ــ (س • ــ ص ) |
|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ٥ | ١ |
| ١ | ٥ | ١ | ٥ |
| ٥ | ١ | ٥ | ١ |
| ٥ | ٥ | ١ | ١ |

وها هنا يكون العمود الأخير من الجدول هو نفسه العمود الأخير فى جدول ( س ⊃ ص ) .

ومن هنا تكون التعبيرات ( س ⊃ ص ) ، ( ــ س V ص ) ، [ ( س • ــ ص ) ] متكافئة منطقياً ويمكن إحلال بعضها محل بعض إزاء جميع الأغراض المنطقية المختلفة[١]

و يمكن تعريف الثابتة المنطقية ( • ) فى حدود ( ــ ) • ( V ) . وعلى ذلك يمكن أيضاً تعريفها فى حدود ( ــ ) ، ( ⊃ ) على النحو التالى . نستخدم التعبير = ت ت بمعنى تكافئ من حيث التعريف أو تتكافأ تعريفياً مع ) .

س • ص = ت ت ــ ( ــ س V ــ ص ) = ت ت ــ (س ⊃ ــ ص)

---

(١) (س • ~ ص ) تؤدى إلى نفى كل من (س • ص ) ، ( ~ س • ~ ص ) [ فى آن معاً . وعلى ذلك يمكن كتابتها بطرق أخرى مثل : ــ ( س • ص ) ، ~ ( ~ س • ~ ص ) . وهذه الطريقة أساسية فى المنطق الرمزى لأنها تعيننا على التوسع والتشعب فى نهاية الأمر بعد أن تستقر معنا أدوات كتابة معانى الثوابت المختلفة بطرق عديدة . وهذا هو ما سوف يتضح بعد هذا مباشرة . ( المترجم )

فمثلا القضية :

( إنه فى آن معاً كسول وغبى )

تعنى تماماً ما تعنيه :

( من الخطأ أنه إما أن يكون غير كسول أو أنه غير غبى )

وتعنى كذلك ما تعنيه :

( من الخطأ أنه إذا كان كسولا فهو ليس غبيًّا )

وكذلك الثابتة ( V ) يمكن بالمثل أن تعرف فى حدود ( ∽ ) ، ( • ) وفى حدود ( ∽ ) ، ( ⊂ ) :

س V ص = ت ت ∽ ( ∽ س • ∽ ص ) = ت ت ∽ س ⊂ ص

وعلى ذلك فالقضية :

( هذا الخطاب إما أنه مزور أو أنه دليل قاطع )

تكافئ منطقيًّا القضية :

( من الخطأ أن هذا الخطاب فى آن واحد ليس مزيفاً وليس دليلا قاطعاً ) .

وتكافئ كذلك القضية :

( إذا لم يكن هذا الخطاب مزيفاً فهو إذن دليل قاطع )

ولتلخيص هذه القضايا نجد أمامنا :

١ — س ⊂ ص = ت ت ∽ س V ص = ت ت ∽ ( س • ∽ ص )

٢ — س • ص = ت ت ∽ ( ∽ س V ∽ ص ) = ت ت ∽ ( س ⊂ ∽ ص )

٣ — س V ص = ت ت ∽ ( ∽ س • ∽ ص ) = ت ت ∽ س ⊂ ص

وينبغى أن نتذكر أن ما نعنيه فى كل حالة بقولنا إن هذه التعبيرات

متكافئة منطقياً هو أنها حائزة على عين جدول الصدق . وظهر هذا هاهنا فيما يتعلق بتعادلات القضية رقم ( ١ ) .

ويستطيع القارئ أن يتحقق من التعادلات الأخرى بواسطة إنشاء جداول الصدق المناسبة .

## ٥ — ثوابت منطقية أخرى :

سوف نرى مما سبق قوله بشأن الثوابت المنطقية التى تتحكم فى أى متغيرتين مثل ( و ) أو ( إذا كان — إذن ) أنها يتم تعريفها بجدول صدق مميز يحتوى على أربعة أرقام كل منها صادق أو كاذب أعنى ١ أو O[1] . وبهذا فجدول الصدق المميز الخاص بدالة الوصل هو ١OOO ( وذلك إذا سجلنا علامة الصدق أو الكذب فى كل عمود تسجيلا أفقياً من أجل التسهيل ) وجدول الصدق المميز الخاص بدالة الاستلزام هو ١O١١ .

وتسمى هذه الأرقام أرقام جدول الصدق أو القالب الرقمى الخاص بدالة الصدق المعنية . وعلى ذلك فالقالب الرقمى الخاص بدالة الفصل هو ١١١O .

وسيكون من الواضح كذلك مما سبق قوله أن أى دالتين تمتلكان نفس القالب الرقمى Matrix-number مثل ( س ⊃ ص ) و ( ∼ س V ص ) تكونان متكافئتين وقابلتين لإحلال إحداهما محل الأخرى فى الأغراض المنطقية :

وتؤدى إمكانية تمثيل الدوال بالقوالب الرقمية على هذا النحو إلى إثارة المسألة التالية : كم عدد الدوال المختلفة الممكنة بالنسبة إلى أى متغيرتين ؟

---

( ١ ) ينبغى أن نتذكر دائماً أن الترقيم ١ يشير إلى T والترقيم صفر أو O وهو الصفر الأفرنجى الذى استخدمناه فى هذا الكتاب للدلاله على قيمه الكذب يشير إلى F . وينشأ عن نتائج الجداول الخاصة بدوال الصدق أرقام أخيرة من مجموع ١ ، مجموع O : ويكون هذا الرقم نفسه أيضاً قالباً رقمياً خاصًا بالدوال المختلفة . ( المترجم )

أو بعبارة أخرى كم طريقة من الطرق المختلفة يمكن أن تسع الأربع خانات المفروض ملؤها بالأرقام ( ١ ، ٥ ) ؟

ومن الواضح أن الإجابة عن ذلك هي كالآتي :

٢ × ٢ × ٢ × ٢ أي ٢^٤ أو ما معناه ١٦ طريقة مختلفة .

وقد سبقت الإشارة إلى ثلاث طرق فقط من الدوال البالغ عددها ١٦ . وأعني بهذه الطرق الثلاث التي أشرنا إليها : ١٥٥٥ — ١٥١١ — ١١١٥ .

فكم عدد الدوال الأخرى التي نحتاج إليها في العمليات القادمة ؟

والإجابة عن ذلك هو أننا لن نحتاج إليها كلها لأنها ليست جميعها ذات أهمية من الناحية المنطقية وإن كان عدد كبير منها سيكون جديراً بالفحص :

وسوف نستعرض هنا ثلاث طرق أخرى منها .

### دالة التكافؤ The Equivalence Function

يقال إن القضيتين تكونان متكافئتين ، أو بمعنى أكثر شيوعاً ، تكونان متكافئتين من حيث المضمون إذا كان لهما عين قيمة الصدق . ومن المناسب أحياناً في حساب القضايا توفير منهج رمزى لتمثيل هذا التكافؤ ، ويعبر عنه عادة بالرمز ( ≡ ) . وعلى ذلك تكون ( س ≡ ص ) عبارة صادقة إذا كان لكل من س ، ص نفس قيمة الصدق . وإلا فهي عبارة كاذبة .

ويتكون جدول الصدق إذن على النحو الآتي :

| س | ص | س ≡ ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ١ | ٥ |
| ٥ | ٥ | ١ |

فالقالب الرقمى الذى يميز دالة التكافؤ هو ١٥٥١ .

وقد لا يوجد تعبير شائع باللغة الإنجليزية يناظر اسم دالة التكافؤ . والطريقة الاصطلاحية الوحيدة للتعبير عن هذه الدالة فى اللغة الإنجليزية هى مجرد استخدام الصيغة ( فقط إذا كان — إذن ) .

والقضية :

( سوف ينجح فقط إذا كان شديد الاجتهاد )

تكون صادقة إذا كان الحكمان المكونان لها (سوف ينجح) ، ( سوف يكون شديد الاجتهاد ) كلاهما صادقين أو أيضاً إذا كان كلاهما كاذبين . فتكون هذه القضية كاذبة إذا كان الحكم الأول المكون لها كاذباً والثانى صادقاً أو إذا كان الأول صادقاً والثانى كاذباً .

ويكون لهذه القضية نفس معنى الوصل بين الاستازامين :

( إذا كان شديد الاجتهاد فإذن سوف ينجح ) ، ( إذا نجح فإذن سوف يكون شديد الاجتهاد ) وبهذا فإن قولنا :

( س ≡ ص )

يعادل دالة الوصل ( س ⊃ ص • ص ⊃ س ) . وإذا أنشأنا جدول الصدق الخاص بالدالة الأخيرة فسوف نرى أنه هو بعينه جدول الصدق الخاص بقولنا ( س ≡ ص )

| س | ص | س ⊃ ص | ص ⊃ س | س ⊃ ص • ص ⊃ س |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ | ١ | ٥ |
| ٥ | ١ | ١ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ٥ | ١ | ١ | ١ |

وعلينا أن نلاحظ أننا قد نبلغ نتائج من قبيل المغالطات تماماً كما جرى من قبل فى دالة الاستلزام إذا أهملنا معانى القضايا التى نعالجها وقصرنا اهتمامنا فقط على قيم الصدق . فذلك من شأنه أن يصل بنا إلى حالات من المغالطات الخاصة بدالات التكافؤ . ولا غرابة فى ذلك إذا راعينا أن التكافؤ يمكن أن يعرف فى حدود الوصل الخاص بدالة الاستلزام .

وعلى ذلك فالقضية :

( نيرون كان إمبراطوراً رومانيًّا )

تعادل القضية :

( كل إنسان فانٍ )

لأن كلا منهما قضية صادقة .

وكذلك القضية :

( الأرض مسطحة )

تعادل القضية :

( روسيا غزت ألمانيا عام ١٩٤١ )

لأن كلا من القضيتين كاذبة .

والواقع أن أى قضية صادقة تعادل أى قضية أخرى صادقة ( أو تعادل نفسها ) كما أن أى قضية كاذبة تعادل أى قضية كاذبة أخرى ( أو تعادل نفسها ) . ومن الشائع أن يترجم التعبير ( س ≡ ص ) بعبارة ( س تكافئ من حيث المعنى ص ) حرصاً على استبعاد الغرابة من استخدام لفظة ( التكافؤ ) .

ولا حاجة بنا إلى أن تزعجنا غرابة هذا الاستخدام للفظة التكافؤ لأننا سوف نجد – كما كان الأمر فيما يتعلق بدالة الاستلزام – أن تعريف الدالة على نحو ما يقدمه لنا جدول الصدق يؤدى عمله بشكل كاف تماماً . ولكن لابد أن تكون القواعد المنطقية عامة بشكل تام فى تطبيقها ولا تحتاج إلى أن تحصر فى الأفكار المؤداة فى اللغة العادية بشرط أن تكون قادرة على تغطية تلك الأفكار .

والواقع أن استخدام ( ≡ ) التى أجملنا عنها الكلام منذ قليل تغطى بالفعل المعنى العادى لقولنا ( فقط إذا كان ) ، غير أنها تقوم بتقنين حالات أخرى بالمثل مما لا يكون له فى اللغة العادية أى طريقة تقليدية فى التعبير .

**دالة البدل** The Alternative Function

سبق أن أشرنا إلى أن لفظة ( أو ) ذات معنيين ، كما أن الأغراض الخاصة بالثوابت المنطقية الأساسية جعلتنا نختار المعنى الخاص بالاستلزام لهذه اللفظة ، أو بعبارة أخرى قبلنا قراءة ( س V ص ) على أنها تعنى :

( إما س أو ص صادقة ومن الجائز كلاهما )

غير أنه من اليسير تعريف المعنى الآخر الوحيد الانفرادى المقتصر على وجه واحد للفظة ( أو ) وإقامة جدول صدق لها فى وضعها المنفرد بهذا الوجه الواحد على أساس الثوابت التى سبق تقديمها . ولنأخذ الرمز ( Λ ) على أنه يشير إلى استخدام ( أو ) بمعنى واحد ، أى بمعنى أنه إما أن تكون س أو ص ولكن ليس كلاهما معاً . وقد سبق أن عالجنا هذا بصدد الكلام عن دالة الفصل . وجدول الصدق الخاص بالمعنى الوحيد الانفرادى للفظة ( أو ) الذى أشرنا إليه بالرمز ( Λ ) هو كالآتى :

| س | ص | س V ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ٥ |
| ١ | ٥ | ١ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ٥ | ٥ |

وهذا هو نفس جدول الصدق الخاص بالعبارة [ ( س V ص ) • ∼ ( س • ص ) ]

وفى إمكان القارئ أن يتحقق بنفسه من ذلك . وعلى ذلك :

س ∧ ص = ت ت [ ( س V ص ) . ⌐ ( س • ص ) ] =ت ت [ ( س V ص ) • ( ⌐ س V ⌐ ص ) ]

**دالة الشطب أو رفض أحد البديلين The Stroke Function :**

سبق أن قدمنا الثوابت المنطقية الأساسية التالية ( ⌐ ) ، ( V ) ، ( • )، ( ⊂ ) . وقمنا بتعريف كل من ( ≡ ) ، ( ∧ ) فى حدود هذه الثوابت ، ورأينا كذلك أن ( V ) ، ( • ) ، ( ⊂ ) يمكن تعريفها فى حدود بعضها البعض بالاستعانة بالثابتة البدائية ( ⌐ ) . وتؤدى حقيقة إمكان تعريف الثوابت المنطقية فيما بين بعضها البعض على ذلك النحو إلى أن نتساءل :

كم عدد الثوابت التى لا غنى عنها فعلا من أجل بناء حساب القضايا[1] ؟

وقد رأينا من النتائج التى وصلنا إليها من قبل أنه يمكننا الاستغناء عنها جميعاً فيما عدا ثابتتين من بينها . ذلك أن ( ⊂ ) ، ( • ) يمكن تعريفها فى حدود ( ⌐ ) ، ( V ) كما أن ( V ) يمكن تعريفها فى حدود ( ⌐ )، ( • ) أو بالتبادل فى حدود ( ⌐ ) ، ( ⊂ ) .

ولكن هل يمكن إنقاص الثوابت أكثر من ذلك عن ذلك العدد ؟

وللإجابة عن ذلك نقول إننا نستطيع أن نستغنى عن كل الثوابت المنطقية فيما عدا إحداها . ولكننا لم نورد من قبل هذه الثابتة .

والدالة التى سنستخدمها هنا من أجل هذا الغرض تعرف باسم دالة الشطب

---

( ١ ) فى مبادئ الرياضيات أو البرنكيبيا تأليف رسل وهوايتهيد اعتبرت الدالتان « ⌐ » ، « V » على أنهما بدائيتان أولا تعريف لهما فى النسق . ولهذا اضطرا إلى تعريفهما بالاستخدام داخل التعريفات الواردة فى هذا الكتاب فى الفقرة الثانية من الفصل الرابع عند الكلام عن قواعد التحويل . ( المترجم )

أو رفض أحد البديلين ويتم تعريفها على النحو التالى : ( س / صَ ) وتقرأ كما يلى :

( على الأقل واحدة من الاثنتين س ، ص كاذبة )

ويقام جدول الصدق الخاص بها على هذا النحو :

| س | ص | س / ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ٥ |
| ١ | ٥ | ١ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ٥ | ١ |

ومن الواضح أن هذه الدالة التى تقرأ هكذا ( على الأقل إحدى الاثنتين س ، ص كاذبة ) تكافئ ( ~ س V ~ ص ) .

ولننظر الآن كيف يمكن أن نعرف الثوابت المنطقية التى أخذناها كأساس فى حدود دالة الشطب .

( أ ) ~ س = ت ت س / س

لأنه إذا كانت ( س ) كاذبة أو ( س ) كاذبة فمن الواضح أن ( س ) كاذبة . وسيؤدى تأمل جداول الصدق إلى توضيح الهوية .

| س | ~ س |
|---|---|
| ١ | ٥ |
| ٥ | ١ |

| س | س | س / س |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ٥ |
| ٥ | ٥ | ١ |

(ب) س • ص = ت ت ( س / ص ) / ( س / ص ) .

فإذا كانت ( س / س ) تكافئ ( ــ س ) كانت إذن ( س / ص ) / ( س / ص ) تكافئ ــ ( س / ص ) .

وكذلك إذا كانت ( س / ص ) تعنى ( على الأقل إحدى الاثنتين س ، ص كاذبة ) .

فإذن [ ــ ( س / ص ) ] تعنى ( من الخطأ أن إحدى الاثنتين س ، ص على الأقل كاذبة ) أو ( كلا س ، ص صادقة ) أى بعبارة أخرى ( س • ص ) .

(ج) س V ص = ت ت ( س / س ) / ( ص / ص ) .

فما دامت ( س / س ) تكافئ ( ــ س ) إذن فالنصف الثانى من عبارة هذا التعريف يمكن أن يقرأ هكذا ( ــ س / ــ ص ) وهو التعبير الذى يعنى أنه ( إما لا ــ س أو لا ــ ص كاذبة ) وهذا يعنى أيضاً ( إما س أو ص صادقة ) أى بعبارة أخرى ( س V ص ) .

( د ) س ⊃ ص = ت ت س / ( ص / ص )

وهنا يكون النصف الثانى من التعريف مكافئاً للعبارة ( س / ــ ص ) وهى ما يمكن أن يقرأ على النحو التالى ( إما س كاذبة أو لا ــ ص كاذبة ) أو ( إما س كاذبة أو ص صادقة ) أى بعبارة أخرى ( ــ س V ص ) وهو نفس ما رأينا من قبل أنه يعنى ( س ⊃ ص ) .

وعلى ذلك فمن الواضح أنه يمكن كتابة كل التعبيرات الخاصة بحساب القضايا فى حدود المتغيرات الخاصة بالقضايا س ، ص ، ل . . . . . وثابتة منطقية واحدة هى دالة الشطب .

غير أن ما نكسبه بالاقتصاد فى التصورات الأساسية عن طريق استخدام

دالة الشطب كتابتة مفردة نفقده من جانب الوضوح النفسي . ذلك أنه من الواضح أن :

( ~ س . ص ) ⊂ ص

تكون أكثر وضوحاً للفهم من قولنا :

[ ( ( س / س ) / ص ) / ( ( س / س ) / ص ) / ( ص / ص ) ]

غير أن هذه التعبيرات متكافئة ، كما يمكن أن يتحقق القارئ من ذلك عن طريق تطبيق التعريفات المتقدمة من أجل تحويل كل تعبير إلى سواه أو عن طريق إنشاء جداول الصدق .

الفصل الثالث

# حساب القضايا

(يتبع)

## ١ – منهج جدول الصدق لاختبار صحة البراهين

لقد ذهبنا فى استعمال جداول الصدق إلى الحد الذى يبدو ملائماً لشرح فكرة الاعتماد على دالات الصدق . وسوف نتقدم الآن نحو استخدام هذه الجداول فيما سوف يبدو بالنسبة إلى معظم القراء عملياً بدرجة أكبر وبطريقة أبعث على الاهتمام وأعنى به اختبار سلامة وصحة البراهين ؛

ولكن قبل أن نتمكن من تطبيقها بهذه الطريقة ينبغى علينا اعتبار عدد كبير من قواعد البناء وأصول الإجراء .

وقد أبدينا اهتمامنا إلى حد كبير بدالات بسيطة جداً خاصة بمتغير واحد أو بمتغيرين . ولكن علينا أن نستعد للاشتغال بالبراهين ذات التعقيد الملحوظ التى تتضمن تعبيرات دوال الصدق المتصلة بعديد من المتغيرات .

واكتفينا فى إجرائنا حتى الآن بالتسليم – كما اتضح من الحالات البسيطة – بعديد من القراعد التى كان يلزمنا جعلها ظاهرة ظهوراً تاماً قبل الذهاب إلى حد الانشغال بحالات أشد تعقيداً .

فلننظر أولا فى مسألة عدد متغيرات القضايا التى تحتوى عليها تعبيرات دالة الصدق . إذ يعنى جدول الصدق الخاص بدالة التناقض التى سبقت الإشارة إليها بقيم الصدق المتعلقة بمتغير واحد للقضايا ( س ) وتشتمل على صفين

وعمودين . ويستنفد الصفان التأليفات الممكنة للقيم التى يمكن أن تعزى إلى المتغير ( س ) ونفيه . أما فيما يتعلق بالعمودين فأولهما يحتوى على القيم الممكنة الخاصة بالمتغير ( س ) والأخر يحتوى على القيم المناظرة لها فيما يخص ( لا ـ س ). وبهذا يكون :

| س | ـــ س |
|---|---|
| ١ | ٥ |
| ٥ | ١ |

وعندما نلتفت إلى دالة الصدق الخاصة بالمتغيرين س ، ص نجد الوضع أكثر تعقيداً . ولنأخذ كمثل لذلك دالة الفصل :

| س | ص | س V ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ١ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ٥ | ٥ |

فها هنا نجد أربعة صفوف أو أسطر وثلاثة أعمدة . وسنرى أن الأربعة الأسطر الخاصة بالعمود المسلسل تحت المتغير ( س ) تبدأ القيم بالنسبة ١١٥٥ كما أن العمود المسلسل تحت (ص) يبدأ قيم الصدق الخاصة به بالنسق ١٥١٥ . فقد بدأت كلها إذن بهذه الطريقة بحيث تتوافر لدينا إمكانات التأليفات الأربع الخاصة بقيم صدق كل من (س) ، (ص) وهى كالآتى :

١١ ـ ١٥ ـ ٥١ ـ ٥٥

وسوف نرى فيما بعد ضرورة وأهمية توافر جميع التأليفات الممكنة لدينا ،

الخاصة بقيم صدق متغيرات القضايا . وبذلك فإن من شأن جدول الصدق الخاص بإحدى المتغيرات أن يحصى قيم صدق المتغير فى النسق ١٠ . ويحصر جدول الصدق الخاص بمتغيرتى قيم الصدق الخاصة بالمتغير الأول فى النسق ١١٠٠ كما أنه يحصر القيم الخاصة بالمتغير الثانى فى النسق ١٠١٠ .

والآن دعنا نفترض أنه يلزمنا إنشاء جدول صدق خاص بتعبير القضية التى تحتوى على ثلاث متغيرات مثل قولنا :

(س V ط) ⊂ (ص V ط)

وقد وجدنا أن الدالة الخاصة بالمتغير تحتفظ بما يعادل (٢١) أو بإمكانيتى الصدق والكذب وأن دالة المتغيرين تحتفظ بما يعادل (٢٢) أو أربع إمكانيات صدق وكذب .

ويجب أن نعرف الآن كم عدد إمكانيات الصدق والكذب الخاصة بدالة ثلاث متغيرات مثل المتغير السابق .

ومن الواضح أنه سيكون ثمة (٢٣) أو بمعنى أصح ثمانية .

وسبب ذلك هو أن المتغير الثالث يحتفظ بإمكانيتى صدق وكذب وهما (١ ، ٠) ؛ وكل منهما لابد أن يتألف مع أربع إمكانيات صدق خاصة بالمتغيرين الأولين . وبذلك سنحتاج إذن إلى ثمانية أسطر فى جدول الصدق .

وعلينا إذن أن نقرر كيف تنحصر القيم من أجل تغطية كل إمكانيات الصدق الثمان . وسنرى أن النسق التالى سيكفى هذا المطلب (برغم أنه ليس بطبيعة الحال النسق الوحيد الممكن) :

| س | ص | ط |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ١ | ٥ |
| ١ | ٥ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٥ | ١ | ٥ |
| ٥ | ٥ | ١ |
| ٥ | ٥ | ٥ |

ويمكننا الآن تلخيص ما قيل سابقاً ونعممه من أجل دالات الصدق الخاصة بأى عدد من المتغيرات فى القاعدتين الآتيتين :

١ – تحتاج دالة صدق عدد (ن) من المتغيرات إلى عدد ($٢^{ن}$) من السطور لكى تكفى كل إمكانيات صدقها .

٢ – يكون نسق الترتيب فى أعمدة قيم الصدق الخاصة بكل واحدة من المتغيرات كالآتى : فحيثما تشير (ن) إلى المجموع الكلى للمتغيرات يكون العمود المسلسل[١] تحت (م) أى فى عمود المتغير « الميمى » على ($٢^{م-١}$) من مجموعات ($٢^{ن-م}$) الخاصة بعلامة الصدق ١ متبوعة بالمجموعة ($٢^{ن-م}$) الخاصة بعلامة الكذب ٥ .

(١) تشير « ن » عادة إلى عدد كل المتغيرات الموجودة فى الدالة وتشير « م » إلى ترتيب المتغير المقصود بين المتغيرات المتوالية ويطلق الميمى على المتغير المقصود . أو يمكن أن نقول باستخدام تعبير المستوى ، الذى سيأتى فيما بعد إن « ن » تشير إلى المستوى و « م » أو الترتيب الميمى إلى حد معين داخل المستوى انظر الفقرة (٤) بفصل (٦) (للمترجم) .

ويمكن توضيح هاتين القاعدتين بالأمثلة على النحو الآتى :

**الحالة الأولى** : نفرض أن لدينا دالة خاصة بمتغيرين . إذن سيتبع ذلك :

**أولا** : سيكون ثمة (٢^٢) أو أربعة سطور

**ثانياً** : سيحتوى العمود المسلسل تحت المتغير الأول على (٢^١ـ١) أو (٢صفر ) أى أنه يحتوى على مجموعة واحدة من (٢^٢ـ١) أو عدد (٢) من علامة الصدق ١ متبوعة بنفس العدد من علامة الكذب ٥ فتكون ١١٥٥ .

**الحالة الثانية** : لنفرض أن لدينا دالة أربع متغيرات إذن سيتبع ذلك .

**أولا** : سيكون ثمة ٢^٤ أو ١٦ سطراً فى جدول الصدق

**ثانياً** : إذا أنشأنا العمود المسلسل تحت المتغير الثالث فسيتوافر لدينا (٢^٣ـ١) أو أربع مجموعات من (٢^٤ـ٣) أو عدد (٢) من علامات الصدق ١ متبوعة بنفس العدد من علامات الكذب ٥ على النحو الآتى :

١١٥٥ ١١٥٥ ١١٥٥ ١١٥٥

**الحالة الثالثة** : دعنا نفترض وجود دالة ذات خمس متغيرات . إذن سيتبع ذلك :

**أولا** : سيكون ثمة (٢^٥) أو ٣٢ سطراً فى جدول الصدق .

**ثانياً** : إذا أردنا إنشاء العمود المسلسل تحت المتغير الثالث مثلا فسيكون لدينا (٢^٣ـ١) أو أربع مجموعات من (٢^٥ـ٣) أو أربع علامات صدق ١ متبوعة بنفس العدد من علامات الكذب ٥ على النحو الآتى :

١١١١٥٥٥٥ ١١١١٥٥٥٥ ١١١١٥٥٥٥ ١١١١٥٥٥٥

وسيتضح أن جداول الصدق تصبح رديئة وغير صالحة للاستعمال حينما احترت تعبيرات دالة الصدق التى نتعامل بها على أكثر من أربع أو خمس متغيرات قضايا . ولكن لحسن الحظ توجد مناهج أكثر اختصاراً كما سنرى يمكن تطبيقها حينما كانت جداول الصدق سيئة الاستخدام على نحو مناسب .

### ٢ - التنقيط المنطقى ومجال الثوابت Logical Punctuation

لما كان اعتمادنا على البساطة المقارنة بين التعبيرات وعلى عدد صغير من المتغيرات المتضمنة فقد أمكننا أن نسلم بقواعد معينة خاصة بتجميع التعبيرات المنطقية وبتنقيطها . ويجب إظهار هذه القواعد الآن قبل أن نشرع فى التعامل بتعبيرات أكثر تعقيداً .

خذ مثلا القضايا التالية :

(١) من الخطأ أنه طموح ونشيط فى عمله .

(٢) إذا كان طموحاً إذن إذا عرضت عليه الوظيفة فسيقبلها .

(٣) سوف تسقط الوزارة أو ستضطر إلى طرح الثقة والبقاء فى الحكم .

ولنفرض أننا وضعنا هذه العبارات فى ترقيم منطقى على التوالى كالآتى :

(٤) ~ س . ص

(٥) س ⊃ ص ⊃ ل

(٦) س V ص . ل

فلا شك فى أننا سنشعر بمدى الغموض فى هذه العبارات توًّا لأن ترجماتها إلى قضايا رمزية فى حساب القضايا غير دقيقة . فنحن لا نعرف بدون رجوع إلى القضية الأصلية رقم (١) ما إذا كانت القضية رقم (٤) تقرأ على النحو التالى : « س كاذبة ، ص صادقة » أو على النحو الآخر : « من الخطأ أن تكون س ، ص صادقتين » . وفضلا عن ذلك يمكن أن تقرأ القضية رقم (٥) إما على هذا النحو : « إذا كانت س إذن ص إذن تكون ل » أو على هذا النحو الآخر : « إذا كان - " إذا كانت س تكون إذن ص " - تكون إذن ل » . وها هنا مرة أخرى لا نعرف بدون رجوع إلى القضية الأصلية رقم (٢) أى القراءتين أصح . وبالمثل يمكن أن تقرأ القضية رقم (٦)

إما على هذا النحو « إما أن تكون س أو ص صادقة وأن تكون ل صادقة » أو على هذا النحو الآخر : « إما أن تكون س صادقة أو ص ، ل كلتاهما صادق » .

ومن السهل التغلب على مثل هذه الغوامض فى كلامنا اليومى الدارج غير أن اللغة المنطقية التى تتوافر لدينا إلى هذه الدرجة الكبيرة ليست من الغنى والثراء بحيث توفر لنا أى وسائل لتحاشى تلك الغوامض . ولذلك فعلينا أن نقدم القواعد التى من شأنها أن توفر لنا مثل تلك الوسائل .

ولنذهب إلى تعريف لفظة « المجال » الخاص بالثابتة المنطقية بوصفه جملة الأجزاء الخاصة بتعبير دالة الصدق الذى تتحكم فيه الثابتة .

وبهذا فالقضية :

(من الخطأ أنه طموح ونشيط فى عمله فى آن واحد) .

أو القضية :

(إنه ليس طموحاً ونشيطاً فى عمله فى آن معاً) .

[ المذكورة أعلاه تحت رقم (١) ]

يمكن أن تترجم بالترقيمات المنطقية كالآتى :

∼ (س . ص)

ويكون « المجال » الخاص بعلامة النفى ( ∼ ) شاملا كل بقية الدالة .

وقارن هذه بقولنا :

( إنه ليس طموحاً ولكنه نشيط فى عمله )

التى نترجمها بالصورة الآتية :

( ∼ س ) . ص

ويقتصر مجال الثابتة ( ∼ ) هنا على حرف (س) بحكم وضعها فى داخل القوس .

وفى الوقت الذى تتحكم فيه الثابتة ( ~ ) على التعبير الذى يتلوها ) أو على جزء من التعبير) وتؤثر فيه بفاعليتها ، نرى الثوابت الأخرى التى قدمناها تؤثر بفاعليتها أو تتحكم فى التعبير (أو جزء من التعبير ) السابق عليها والآتى بعدها . فمثلا يكون مجال العلامة ( V ) فى قولنا ( س V ص ) هو كل من س ، ص وفى قولنا (س V ( ص • ل ) ) يكون المجال الخاص بالعلامة ( V ) هو كلا من س و ( ص • ل ) فى حين يكون مجالها فى قولنا ( س V ص ) . ل مقصوراً على س و ص . وتسمى هذه باسم ثوابت ذات حدين .

فعلينا لذلك أن ندخل استعمال الأقواس فى الأسلوب الرمزى المتبع فى حساب القضايا من أجل إظهار مجال كل ثابتة من ثوابت المنطق المستخدمة فى الحالات التى بدونها تصبح غامضة .

وستكفى القواعد التالية لاستخدام الأقواس كل أغراض هذا الكتاب .

**١ – القضية الأساسية الأولى :**

يقتصر مجال العلامة ( ~ ) على متغيرة القضايا التى تأتى بعدها مباشرة ما عدا حالة واحدة تكون العلامة ( ~ ) فيها متبوعة بالقوس الأيمن (فى هذه الحالة يمتد مجال العلامة ( ~ ) إلى القوس الأيسر المقابل له) .

مثال أول :

فى قولنا ~ س . ص يكون مجال ( ~ ) هو س

مثال ثان :

فى قولنا ~ (س . (ص ⊂ ل ) V. ط ) يكون هو التعبير بأكمله .

مثال ثالث :

فى قولنا ــ ( س . ص ) V ( ل ⊂ ط ) يكون مجال ( ــ ) هو ( س . ص ) .

## ٢ ـ القضية الأساسية الثانية

إذا تاخم الثابتة ذات الحدين متغير خاص بالقضايا اقتصر مجال تلك الثابتة فى نفس الجانب على متغير القضايا . وإذا تاخم الثابتة ذات الحدين قوس امتد مجال الثابتة إلى القوس « المقابل » له .

مثال أول :

فى قولنا س ⊂ (ص V ل )

يكون مجال الثابتة ( ⊂ ) هو التعبير كاملا من أوله إلى آخره أى يكون هو س وكذلك (ص V ل ) .

مثال ثان :

فى قولنا [ ( س ⊂ ص ) ⊂ ل] ⊂ [ ( ل ⊂ ص ) ⊂ (ط ⊂ س ) ]

يكون مجال الثابتة الأولى ( ⊂ ) هو س ، ص . أما مجال الثابتة الثانية ( ⊂ ) فهو (س ⊂ ص ) وكذلك ل . أما مجال الثابتة الثالثة ( ⊂ ) فهو العبير كاملا من أوله إلى آخره وهكذا

## ٣ ـ إنشاء جداول الصدق وتطبيقها

دعنا نأخذ مثلا لبرهان بسيط يدخل فى مجال حساب القضايا :

إذا كان حسن بريئاً كان إذن بعض الأدلة مزيفاً .

ولكن ليس بعض الأدلة مزيفاً .

إذن ليس حسن بريئاً »

توجد فى هذا المثال مقدمتان ونتيجة . والمقدمة الكبرى تحتوى على علاقة استلزام ، والمقدمة الصغرى تحتوى على نفى ما يترتب على المقدمة الكبرى .

ولذلك تحتوى النتيجة على نفى الجملة الأولى فى إطار المقدمة الكبرى . وتعمل لفظة ( إذن ) التى تتقدم النتيجة على إثبات أن المقدمتين معاً تستلزمان النتيجة . أو بعبارة أخرى تدل لفظة ( إذن ) على أن المقدمتين معاً إذا تقررتا تبعتهما النتيجة . دعنا إذن نضع بدلا من العبارة ( حسن برىء ) متغيرة القضايا ( س ) وبدلا من العبارة ( بعض الأدلة مزيف ) متغير القضايا ( ص ) .

فبذلك نستطيع تقديم صورة البرهان المنطقى بالترقيم الخاص بحساب القضايا على النحو التالى :

[ ( س ⊃ ص ) . ~ ص ] ⊃ ~ س

وسنحاول أن نضع جدول الصدق الخاص بهذا التعبير المركب . وسنضع عند بناء جداول الصدق قيم الصدق الخاصة بالمتغيرات فى أعمدة منفصلة إلى يمين جدول صدق الدالة المستعملة على نحو ما يتلو :

| س | ص | س ⊃ ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ١ | ١ |
| ٠ | ٠ | ١ |

وهذ المنهج هو أوضح ما يلزم العرض الأولى . غير أنه يكون أكثر

إيجازاً من أجل مواجهة التطبيقات العملية الأكثر ملاءمة إذ وضعناه على النحو التالى :

| ص | ⊃ | س |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ |
| ٠ | ٠ | ١ |
| ١ | ١ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ |

بحيث يكتب جدول الصدق الخاص بالتعبير كله الذى يمثل مجال الثابتة المنطقية مباشرة أسفل الثابتة فى وضعها الحقيقى بين المتغيرين .

وسوف نراعى هذه الطريقة العملية فى كل ما يأتى :

ولنحاول الآن إنشاء جدول تعبير صدق القضايا المشار إليه :

[ (س ⊃ ص) . ∼ ص] ⊃ ∼ س

أولا : ننشئ أعمدة قيم الصدق الخاصة بمتغيرات القضايا الفردية من اليمين إلى اليسار على النحو التالى :

| (٤) | (٣) | (٢) | (١) |
|---|---|---|---|
| ∼ س | ⊃ | ∼ ص] | [(س ⊃ ص) . |
| ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٠ | ٠ | ١ |
| ٠ | ١ | ١ | ٠ |
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |

والأرقام الواردة فوق كل متغير فى القضايا يعين النسق الذى يجب أن يتبع لإكمال الأعمدة .

بعد ذلك نحاول إنشاء جداول الصدق الخاصة بثوابت المجال الأضيق من اليمين إلى اليسار . ( فى هذه الحالة تكون الثابتة ( ⊃ ) هى الأولى فى حين تتلوها الثابتتان الأخريان الدالتان على النفى ) .

| (١) | (٥) | (٢) | (٦) | (٣) | (٧) | (٤) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [(س | ⊃ | ص). | ∼ | ص] | ⊃ ∼ | س |
| ١ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ |
| ١ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ١ |
| ٠ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ |

ثم نحاول بعد ذلك مرة أخرى إنشاء جدول صدق الثوابت الأخيرة الباقية التى تؤدى وظيفتها ابتداء من المجال الأضيق حتى المجال الأوسع . وتجرى قراءة الجدول الأخير على النحو التالى :

| (١) | (٥) | (٢) | (٨) | (٦) | (٣) | (٩) | (٧) | (٤) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [(س | ⊃ | ص | · | ∼ | ص] | ⊃ | ∼ | س |
| ١ | ١ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ١ |
| ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ |
| ٠ | ١ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ١ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ |

ذلك أننا نقيم جدول دالة « الوصل » بين ( س ⊃ ص ) ، و ( ∼ ص ) تحت الرقم ( ٨ ) . وفى النهاية نكمل الجدول تحت الرقم ( ٩ ) بإنشاء جدول الثابتة الخاصة بأوسع مجال وهى ( ⊃ ) التى تقع بين [ (س ⊃ ص ) · ∼ ص] إلى يمينها و (∼ س) إلى يسارها . ولتكوين العمود الخاص بها نطبق القاعدة

على الثابتة ( ⊃ ) باعتبار العمود رقم (٨) العبارة الأولى السابقة والعمود رقم (٧) كعبارة تالية .

سيلاحظ أن العمود الرئيسى فى جدول الصدق ، وهو العمود المنحدر تحت الثابت ذى المجال الأوسع ، يحتوى فقط على علامات الصدق (١) المكررة وحدها . أو بعبارة أخرى يثبت صدق التعبير بالنسبة إلى كل تأليفات الصدق الممكنة الخاصة بالمتغيرات . ويعنى هذا أن التعبير يكون سليماً منطقياً أو صادقاً صدقاً منطقيا أو مجرد تحصيل حاصل . (وهذه العبارات الثلاثة قد تؤخذ على أنها مترادفة ) .

وبذلك يكون لدينا منهج اختبار للسلامة المنطقية للبراهين التى يمكن التعبير عنها بقضايا الاستلزام فى الترقيم المتبع فى حساب القضايا .

فنحن ننشئ جدول الصدق لمثل هذه التعبيرات . . . وإذا جاء العمود الرئيسى أى العمود المنحدر تحت ثابتة المجال الأوسع محتوياً على علامات الصدق (١) المكررة وحدها كان البرهان سليماً منطقياً . ولكن إذا جاءت علامة كذب (O) واحدة على الأقل فى العمود الرئيسى كان البرهان « غير سليم » منطقياً .

ولنأخذ بدلا من البرهان الذى اتخذناه مثالا فيما تقدم العبارة التالية :

إذا كان حسن بريئاً كان إذن بعض الأدلة مزيفاً

ولكن ليس حسن بريئاً

إذن ليس بعض الأدلة مزيفاً

ودعنا نضع هذا البرهان فى ترقيم حساب القضايا على النحو السابق فسنجد إذن لدينا : [ (س ⊃ ص) . ~ س ] ) ~ ص

وعلى هذا نعد جدول الصدق الخاص بهذا التعبير فنجد ما يلى :

| [(س | ⊂ | ص) | · | ∼ | س] | ⊂ | ∼ | ص |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ | 0 | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ |
| ١ | 0 | 0 | 0 | 0 | ١ | ١ | ١ | 0 |
| 0 | ١ | ١ | ١ | ١ | 0 | 0 | 0 | ١ |
| 0 | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 |

وها هنا نجد أن العمود المنحدر أسفل الثابتة الرئيسية لا يحتوى فقط على علامات الصدق (١) المكررة . وإنما توجد فيه علامة كذب (0) واحدة فى السطر الثالث مما يدل على أن التعبير ليس صادقاً بالنسبة إلى كل إمكانيات الصدق الخاصة بمتغيراته . فقيمته هى (0) فى الحالة التى تأخذ فيها (س) قيمة (0) والتى تأخذ فيها (ص) قيمة (١) على نحو ما هو ظاهر فى السطر الثالث .

وحينما يتعقد التعبير لوجود متغيرات القضايا الثلاث أو الأربع أو حتى الأكثر من ذلك يظل الإجراء هو نفسه كما هو الحال فى الأمثلة المذكورة عاليه .

| [(س | ⊂ | ص) | · | (∼ | ل | ⊂ | ∼ | ص)] | ⊂ | (س | ⊂ | ل) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ١ | ١ | 0 | ١ | 0 | 0 | 0 | ١ | ١ | ١ | 0 | 0 |
| ١ | 0 | 0 | 0 | 0 | ١ | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | 0 | 0 | 0 | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | 0 |
| 0 | ١ | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ |
| 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | 0 | 0 | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | 0 |
| 0 | ١ | 0 | ١ | 0 | ١ | ١ | ١ | 0 | ١ | 0 | ١ | ١ |
| 0 | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | ١ | 0 | ١ | 0 | ١ | 0 |

وعلى ذلك يكون لدينا فى جدول الصدق منهج آلى لتقرير ما إذا كان أى تعبير فى حساب القضايا « صادقاً منطقياً » أو تكراراً بلا فائدة ، أو « تحصيل حاصل » أم لا . ويعنى هذا — إذا كان التعبير صورة البرهان — أننا نملك وسائل تقرير ما إذا كان أى برهان داخل مجال حساب القضايا سليماً منطقياً أم لا .

## ٤ — المنهج غير المباشر لتقرير جدول الصدق

رأينا أن عدد السطور الضرورية لأى جدول صدق تزداد زيادة هندسية مع زيادة عدد المتغيرات كما رأينا أن هذه النتائج توضع فى شكل تعبيرات من خمسة متغيرات أو أكثر غير صالحة للاستعمال حسب المناهج المذكورة من قبل . .

ولكن يوجد على أى حال منهج قصير وغير مباشر لاختبار الصحة المنطقية التى تنبنى عليها المبادئ المسيطرة على بناء جداول الصدق . وقد رأينا أن جدول صدق التعبير السليم منطقيا يحتوى فى العمود الهابط تحت الثابتة الرئيسية ( أى تحت الثابتة ذات المجال الأوسع ) العلامة ( ١ ) فقط التى تشير إلى الصدق . فلو أننا افترضنا الآن أن مثل هذا التعبير يمتلك ( ٥ ) واحدة فى عمود الوسط الخاص بجدوله وقمنا بفحص النتائج المترتبة على هذا الافتراض لرأينا أن هذه النتائج المترتبة عليه غير متآلفة مع القواعد الأساسية لبناء جداول الصدق .

انظر فى هذا التعبير :

[ ( س ⊂ ص ) • ∽ ص ] ⊂ ∽ س

الذى كان بمثابة جدول صدق فيما سبق . واكتب التعبير مع ( ٥ ) واحدة أسفل الثابتة ذات المجال الأوسع وتقدم لملء قيم الصدق المترتبة على ذلك بما يتفق مع القواعد .

**الخطوة الأولى :**

[(س ⊃ ص) . ∼ ص] ⊃ ∼ س

١ ٠ ٠

١ ١

( يقوم السطر الثانى من الأعداد تحت قيم الصدق بتعداد خطوات الإجراء حتى يمكن اختبارها اختباراً نهائياً ) .

فنضع (١) تحت الثابتة الرئيسية الخاصة بالجزء الأسبق من العبارة ونضع (٠) تحت الثابتة الخاصة بالجزء التالى على نحو ما تتلو هذه النقلة المشروعة الخاصة بالقيم من الادعاء بأن التعبير كله يأخذ القيمة (٠)

وإذا تقدمنا على هذ النحو حصلنا على :

**الخطوة الثانية :**

[(س ⊃ ص) . ∼ ص] ⊃ ∼ س

١ ١ ١ ٠ ٠

(٢) (١) (٢) (١)

**الخطوة الثالثة :**

[(س ⊃ ص) . ∼ ص] ⊃ ∼ س

١ ١ ١ ٠ ٠ ٠ ١

(٢) (١) (٢) (٣) (١) (٣)

الخطوة الرابعة :

[ ( س ⊃ ص ) . ∼ ص ] ⊃ ∼ س

١ ١ ٠ ١ ١ ٠ ٠ ٠ ١

(٤) (٢) (٤) (١) (٢) (٣) (١) (٣)

ونقوم فى هذه الخطوة الأخيرة بملء القيم الخاصة بكل من ( س ) ، ( ص ) وهى القيم الناجمة عن الخطوات السابقة فنجد لدينا التعبير ( س ⊃ ص ) الذى يأخذ القيمة ( ١ ) فى حين تأخذ ( س ) نفس القيمة وتأخذ ( ص ) القيمة ( ٠ ) . وبالإحالة إلى جدول الصدق الذى يصف استخدام دالة الصدق الخاصة بالعلاقة ( ⊃ ) نجد أن هذا لايجوز . وبذلك يؤدى فرض وجود (٠) فى العمود الرئيسى فى الجدول إلى تناقض فى القواعد الأصلية الخاصة بإنشاء جدول الصدق . وعلى ذلك لا يمكن أن توجد ( ٠ ) فى العمود الرئيسى ، وبذلك يكون التعبير صحيحاً أو سليماً منطقيا .

وقد يبدو هذا المنهج شبيهاً ببرهان الخلف من بين نماذج الإثبات فى الهندسة . إذ أن النتائج المترتبة على فرض معين تؤدى إلى نهاية غير مقبولة . وبذلك فالفرض ( الذى يزعم فى هذه الحالة أن القيمة ( ٠ ) داخلة فى العمود الرئيسى ) قد ثبت عدم صحته أى أنه خاطئ .

ولكن من ناحية أخرى إذا كان فرض وجود ( ٠ ) فى العمود الرئيسى فى جدول الصدق لايؤدى إلى أى اعتداء على القواعد الأصلية . . . إذن فالعمود الرئيسى يحتوى فعلا على ( ٠ ) ويكون التعبير بالتالى غير صحيح منطقياً .

مثال ذلك :

[ ( س ⊃ ص ) . ∼ س ] ⊃ ∼ ص

٠ ١ ١ ١ ١ ٠ ٠ ٠ ١

(٥) (٢) (٦) (١) (٢) (٣) (١) (٤)

فها هنا تكون تأليفات قيم الصدق متفقة مع القواعد الأصلية الخاصة بمنهج جدول الصدق . وبذلك ففرض وجود ( ٠ ) فى العمود الرئيسى يؤدى إلى عدم المساس أو الإساءة إلى القواعد الأصلية فيكون التعبير بالتالى غير صحيح منطقياً .

ولإعطاء مثل على المنهج غير المباشر الذى يطبق على التعبير المنطوى على متغيرات عديدة دعنا ننظر فيما يلى :

[(س ⊃ ص ⊃ ل] ⊃ [(ل ⊃ س) ⊃ (ط ⊃ س)]

٠ ٠ ١ ٠ ٠ ٠ ١ ٠ ٠ ١ ٠ ٠

(٤) (٧) (١) (٦) (٥) (٢) (٤) (١) (٣) (٢) (٣)

فى هذا المثل يتخذ التعبير (س ⊃ ص) القيمة ( ٠ ) فى حين تكون قيمة (س) أيضاً هى ( ٠ ) . وهذا مستحيل بحكم جدول الصدق الخاص بدالة التضمن . وعلى ذلك فالتعبير صحيح منطقياً أو سليم منطقيا .

( ملحوظة : لاحاجة لتحديد قيمة (ص) لأن النتيجة هى سواء أخذت (ص) القيمة ( ٠ ) أو القيمة ( ١ ) ) .

### ٥ — تصنيف القضايا

يمكن أن يوضع كل تعبير لدوال الصدق فى جدول صدق وأن يصنف فى أحد الأنماط الثلاثة القادمة وفقاً للطابع المميز لجدول الصدق الخاص به ، أو بتعبير أدق وفقاً لطابع القالب الرقمى المميز له . فإذا كان القالب الرقمى أى التتابع العددى فى العمود الرئيسى بجدول الصدق محتوياً فقط على القيمة ( ١ ) المتكررة كان التعبير سليماً منطقياً أو صادقاً صدقاً منطقياً أو تحصيل

حاصل . (وسننظر إلى هذه الحدود بوصفها مترادفة فى هذا السياق) أما إذا احتوى القالب الرقمى على القيمة (٥) فقط كان التعبير كاذباً من وجهة النظر المنطقية أو متناقضاً أو غير صحيح منطقياً . ولكن إذا احتوى العمود الرئيسى — كما هو الحال فى معظم التعبيرات — على كل من (١) ، (٥) كان التعبير احتمالياً بحيث يتوقف الصدق أو الكذب على تأليفة خاصة من قيم صدق المتغيرات فيكون صادقاً بالنسبة إلى بعض إمكانيات الصدق وكاذباً بالنسبة إلى بعضها الآخر.

مثال ذلك :

ا — (س ⊂ ص) ≡ (∼ ص ⊂ ∼ س)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٥ | ١ | ١ | ٥ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ | ٥ | ١ | ١ | ٥ | ٥ | ١ |
| ٥ | ١ | ١ | ١ | ٥ | ١ | ١ | ١ | ٥ |
| ٥ | ١ | ١ | ٥ | ١ | ١ | ٥ | ١ | ٥ |

ب — (س ⊂ ص) . (س . ∼ ص)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٥ | ٥ | ١ | ٥ | ١ | ١ | ١ |
| ٥ | ١ | ١ | ١ | ٥ | ٥ | ٥ | ١ |
| ١ | ٥ | ٥ | ٥ | ٥ | ١ | ١ | ٥ |
| ٥ | ١ | ٥ | ٥ | ٥ | ٥ | ١ | ٥ |

جـ — (س ⊏ ص) ⊏ (ص V ل)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| O | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ١ | O | ١ | O | O | ١ |
| O | O | O | ١ | O | O | ١ |
| ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | O |
| O | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | O |
| ١ | ١ | O | ١ | O | ١ | O |
| O | O | O | O | O | ١ | O |

وسوف نرى أن (أ) من تعبيرات الجداول السابقة يعد تعبيراً صادقاً ، ويعد (ب) تعبيراً كاذباً ، فى حين يعد (جـ) تعبيراً محتملا . وفى الحالة (جـ) تبرز قيمة الصدق (O) كمقابل فى المرة الوحيدة التى اتخذت فيها كل من س ، ص ، ل القيمة (O) .

وينشأ عن هذا التصنيف نقطتان هامتان :

٢ — كل تعبير كاذب أو غير صحيح منطقياً يكون نفياً لتعبير صادق منطقياً أو تحصيل حاصل والعكس بالعكس .

٢ — كل تعبير صادق منطقياً يكون متكافئاً مع أى تعبير آخر صادق منطقياً . وبالمثل كل تعبير يتعارض مع الصحة منطقياً يكون متكافئاً مع أى تعبير آخر غير صحيح منطقياً .

## ٦ — الصيغ الأساسية للاستدلال

سيكون من المفيد أن نضع هنا قائمة أساسية مكونة من أهم التعبيرات الصادقة منطقياً .

ص أ رقم ١ : ∼ ( س . ∼ س )

هذا هو قانون عدم التناقض[١] الخاص بالمنطق التقليدى مطبقاً على القضايا.
ويقرر هذا القانون أنه لا توجد قضية صادقة وكاذبة فى آن واحد .

ص أ رقم ٢ : ( س V ∼ س )

وهذا هو قانون الثالث المرفوع الخاص بالمنطق التقليدى بعد تطبيقه على القضايا . ويقرر هذا القانون أن كل قضية يجب أن تكون إما صادقة أو كاذبة :

ص أ رقم ٣ : ( س ⊃ س )

وهذا هو قانون الهوية فى المنطق التقليدى مطبقاً على القضايا . وهو يقرر أن كل قضية تستلزم ذاتها . وسوف نرى أن هذه القوانين الثلاثة الموضوعة فى الصيغ الأساسية الثلاث السابقة يمكن تحويل أحدها إلى الآخر بتطبيق القواعد المذكورة آنفاً فى الفقره ( ٤ ) بشأن ترجمة إحدى الثوابت الزوجية إلى ( ∼ ) بالإضافة إلى إحدى الثوابت الزوجية الأخرى .

ص أ رقم ٤ : ( س . ص ) ⊃ س

ص أ رقم ٥ : ( س . ص ) ⊃ ص

وكلاهما ينص على أن الوصل يستلزم واحدة من القضيتين الموصولتين .

ص أ رقم ٦ : س ⊃ ( س V ص )

---

( ١ ) يعد إرجاع هذه التسميات إلى صيغ القضايا من الأقوال غير السليمة إطلاقاً . ولكن بعض كتب المنطق الرمزى لم ترفض ذلك نهائياً .

إذا كانت القضية صادقة كان أى « فصل » تشترك فيه تلك القضية صادقاً .

ص أ رقم ٧ : ∼ ∼ س ≡ س

تؤدى مضاعفة علامة النفى إلى تعطيل النفى . أو بعبارة أخرى يكون إنكار قضية منفية مكافئاً لتأكيد صدق القضية .

ص أ رقم ٨ : ( س · ص ) ≡ ( ص · س ) .

ص أ رقم ٩ : ( س V ص ) ≡ ( ص V س ) . .

الصيغتان الأخيرتان هما بمثابة قانونين تبديليين للوصل والفصل على التوالى . فإنهما يعبران عن حقيقة أن نظام الدوال المكونة لمجال كل من ( · ) ، ( V ) هو نظام لا يمثل أى مضمون مادى . ونلاحظ أن قانون التبديل لا ينطبق بحال على الثابتة ( ⊂ ) .

ص أ رقم ١٠ : [ س · ( ص · ل ) ] ≡ [ ( س · ص ) · ل ]

ص أ رقم ١١ : [ س V ( ص V ل ) ] ≡ [ ( س V ص ) V ل ]

الصيغتان المذكورتان هنا هما قانونا الترابط لكل من الوصل والفصل على التوالى . وهما يعبران عن حقيقة أن تجميع التعبيرات التى تحتوى على ( · ) فقط كدالة ( أو على ( V ) كتابة ) لا يمثل أى مضمون مادى بالنسبة إلى سلامة التعبير المنطقية . ونلاحظ أيضاً أن قانون الترابط لا ينطبق على الثابتة ( ⊂ ) .

ص أ رقم ١٢ : [ س · ( ص V ل ) ] ≡ ( س · ص ) V ( س · ل )

ص أ رقم ١٣ : [ س V ( ص · ل ) ] ≡ ( س V ص ) · ( س V ل )

وهذان القانونان هما قانونا التوزيع للوصل والفصل . وأولهما له مماثل فى الحساب والجبر إذا قرأنا علامة الضرب ( × ) على أنها ( · ) وعلامة الجمع ( + ) على أنها (V) . ومن الصحيح دائماً إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً كانت [ أ × ( ب

+ جـ) = مساوية لقولنا (أ × ب) + (أ × جـ). ولكن لا يوجد مماثل من هذا القبيل للصيغة (١٣) فى الحساب .

ص أ رقم ١٤ : (س · ص) ≡ ∽ (∽ س V ∽ ص) .

ص أ رقم ١٥ : (س V ص) ≡ ∽ (∽ س · ∽ ص) .

تعرف هاتان الصيغتان باسم قاعدتى مورجان لدى رجال المنطق والرياضيات الإنجليز . وبرغم أن أو جسطس مورجان لم يكن أول المناطقة الذين اكتشفوا هاتين القاعدتين اللتين كانتا معروفتين فى العصور الوسطى فإنه كان أول من لفت النظر إلى أهميتهما .

وسنرى باختبار هاتين القاعدتين كما وردتا هنا أنه توجد علاقة هامة بين الوصل والفصل . ويمكن التعبير عن أى عبارة يوجد فيها فصل بعبارة وصل إذا نفينا كلا التعبيرين المكونين للفصل والفصل ذاته أيضاً . وبالمثل يمكن التعبير دائماً عن أى وصل بالفصل إذا نفينا كلا التعبيرين المكونين للوصل والوصل ذاته أيضاً . وتعرف هذه العلاقة الهامة باسم ثنائية الوصل والفصل . وهى علاقة ذات فائدة كبيرة فى العمليات المنطقية .

ص أ رقم ١٦ : (س ⊃ ص) ≡ (∽ ص ⊃ ∽ س)

وهذا هو قانون المتقابلات Contraposition . وهو يقرر إمكان استبدال العبارة المكونة الأولى بالعبارة المكونة التالية والعكس بالعكس على شرط نفى كل منهما .

ص أ رقم ١٧ · (س ⊃ ص) ≡ (∽ س V ص)

وهذا هو تعريف الاستلزام المادى أو الموضوعى الذى صادفناه فى هذا الكتاب من قبل .

ص أ رقم ١٨ : (س ⊃ ص) ≡ ~ (س • ~ ص)

يمكن أن يتحول هذا التعبير إلى صيغة أساسية من نوع رقم ١٧ السابقة عن طريق تطبيق الصيغتين الأساسيتين رقم ٧ ورقم ١٤ على العبارة اليسرى من قضية التعادل الحالية رقم ١٨ . وهذا تعريف آخر للاستلزام المادى أو الموضوعى .

ص أ رقم ١٩ : [ (س ⊃ ص) • (ص ⊃ ل) ] ⊃ (س ⊃ ل)

وهذا هو قانون التعدى للاستلزام . وهو يقرر أنه إذا استلزم تعبير تعبيراً آخر واستلزم التعبير الآخر تعبيراً ثالثاً كان التعبير الأول يستلزم الثالث

ص أ رقم ٢٠ : [ (س ⊃ ص) • س ] ⊃ ص

وتعرف هذه باسم قاعدة الفصائل أو Detachment (Ponendo-Ponens) وهى تقرر أن العبارة المكونة الأولى فى الاستلزام تثبت فى وقت واحد مع الاستلزام وبالتالى تتبعها العبارة المكونة التالية فى الاستلزام .

## ٧ ــ إجراءات الاستدلال القاطع والأشكال العادية : Decision Procsedures

من أهم مشاكل المنطق مشكلة إيجاد منهج يعيننا على اكتشاف ما إذا كان أى تعبير تحصيل حاصل أم لا . وقد شرحنا منهج جداول الصدق وهو أحد المناهج التى تقوم بهذا الدور وتتوافر لدينا فى حساب القضايا . وهذه المناهج هى التى نسميها باسم « إجراءات الاستدلال القاطع » أو إجراءات القطع بحكم معاونتها لنا على « القطع » بأن التعبير تحصيل حاصل أم لا .

وقد رأينا أن منهج جداول الصدق يصبح أحياناً غير عملى عندما يزيد عدد متغيرات القضايا زيادة كبيرة فى التعبير الذى ننظر فى صدقه المنطقى .

وهناك أيضاً إجراء قاطع آخر أكثر ملاءمة فى بعض الأحيان من منهج

جدول الصدق . ويعرف هذا الإجراء القاطع باسم منهج التحويل أو الرد إلى الصورة « العادية » أو « المقبولة »[1] canonical form .

ورأينا من قبل أن أى ثابتة منطقية فى حساب القضايا يمكن التعبير عنها فى حدود الثوابت الأخرى . فمثلا يمكن ترجمة التعبير الذى يحتوى على الثابت ( • ) ، ( ⊃ ) إلى تعبير متكافئ يحتوى على ( ∼ ) ، ( V ) فقط كثوابت .

وبذلك كان التعبير

[ ( س ⊃ ص ) • ( ص ⊃ ل ) ] ⊃ ( س ⊃ ل )

متكافئاً مع التعبير

∼ ∼ [ ∼ ( ∼ س V ص ) V ∼ ( ∼ ص V ل ) ] V ( ∼ س V ل )

بواسطة تطبيق ص أ رقم ١٤ ، ١٧ السابقتين .

ويصبح من الممكن إذا استخدمنا التعبيرات المتكافئة على هذا النحو تحويل أى تعبير إلى تعبير آخر يحتوى على وصل لدالات الفصل من الشكل الآتى :

( س V ص V ∼ ص ) • ( ص V ص V ل V ··· ) • ( س V ∼ ص V ∼ ل V ··· )

فمثل هذا التعبير يعرف « كشكل عادى للوصل » .

دعنا ننظر فى الأمثلة الآتية للتعبيرات التى تتحول إلى شكل عادى للوصل .

أ – [ ( س ⊃ ص ) • ∼ ص ] ⊃ ∼ س

---

( ١ ) يعرف دارسو المنطق الأرسطى عمليات الرد أو التحويل فى صياغة القضية بأسلوب آخر يغير من شكل القضية ولكن يبقى على نفس المعنى بلا أدنى تغيير كما هو الحال فى العكس المستوى فى الاستدلال المباشر كأن نقول : ( لا إله فان ) أو ( لا فانى إله ) ( المترجم ) .

~ [ (~ س V ص) · ~ ص ] V ~ س (حسب ص أ ١٧ )

~ (~ س V ص) V ~ ~ ص V ~ س (حسب ص أ ٧ ، ١٤ )

(س · ~ ص) V ص V ~ س (حسب ص أ ٧ ، ١٥ )

(ص V س) · (ص V ~ ص) V ~ س (حسب ص أ ٩ ، ١٣ )

(س V ~ س V ص ) · ( ~ س V ص V ~ ص ) حسب ٩ ، ١٣ )

ب — [ (س ⊃ ص) · (ص ⊃ ل) ] ⊃ (س ⊃ ل)

أولا : نحول التعبير ( حسب ص أ ١٧ ) إلى الشكل الآتى :

~ [ ( ~ س V ص ) · ( ~ ص V ل ) ] V ( ~ س V ل )

وإذا طبقنا قاعدة مورجان (وأسقطنا النفي المزدوج حسب ص أ ٧) توافر لدينا :

~ ( ~ س V ص ) V ~ (~ ص V ل ) V (~ س V ل )

وتؤدى إعادة تطبيق القاعدة إلى :

(س · ~ ص ) V (ص · ~ ل) V (~ س V ل )

وبتطبيق قوانين التوزيع على طرفى الفصل الأولين نحصل على :

( س V ص) · ( س V ~ ل ) · (ص V ~ ص) · (~ ص V ~ ل) V (~ س V ل )

وفى النهاية إذا طبقنا قانون التبديل ( ص أ ٩ ) أمكننا وضع الحد الثانى من دالة الفصل فى أول التعبير ثم نطبق (ص أ ١٣) ونحصل على ما يلى :

(س V ~ س V ص V ل) · (س V ~ س V ل V ~ ل) .

( ~ س V ص V ~ ص V ل) · ( ~ س V ~ ص V ل V ~ ل)

وبهذا يصبح التعبير الآن فى الشكل العادى للوصل الخاص به :

جـ — [ (س ⊃ ص) · ~ س ] ⊃ ~ ص

أولا : نطبق ( ص ١ ١٧ ) من أجل تحويل ثوابت الاستلزام إلى علامات نفى وفصل :

∽ [ ( ∽ س V ص ) • ∽ س ] V ∽ ص

ثم نطبق قاعدة مورجان لتحويل علامة الوصل بنفس الطريقة :

∽ ∽ [ ∽ ( ∽ س V ص ) V ∽ ∽ س ] V ∽ ص

ثم نسقط بعد ذلك النفى المزدوج بواسطة ( صأ ٧ ) ونستخدم قانون الترابط (صأ ١١ ) لتجميع التعبير كالآتى :

∽ ( ∽ س V ص ) V (س V ∽ ص)

ثم نطبق (صأ ٧ ) وقاعدة مورجان لتحقيق ما يلى :

(س • ∽ ص) V (س V ∽ ص)

وفى النهاية نقوم بوصل نظام عناصر الفصل الرئيسى عن طريق قانون التبديل وعن طريق استعمال قانون التوزيع ( صأ ١٣ ) من أجل الحصول على ما يلى :

(س V س V ∽ ص) • (س V ∽ ص V ∽ ص )

وحينئذ يصبح التعبير فى شكل الوصل العادى .

فإذا قمنا بفحص أشكال الوصل العادية المحققة فى هذه التداولات والعمليات أمكننا أن نتبين أن كل طرف من طرفى الوصل فى المثلين ( ا ، ب ) يحتوى على متغيرة قضايا ونفيها متصلين بواسطة (V) . فمثلا نرى أن طرفى الوصل الأول ( ا ) يحتوى فى شكله العادى على (س) و ( ∽ س ) متصلين بواسطة (V) كما أن الطرف الثانى للوصل يحتوى على ( ص ) و ( ∽ ص ) موصولتين بنفس الطريقة . ويعد هذا الفصل الخاص بمتغير القضية ونفيه تحصيل حاصل . ( انظر أعلاه ص ١ ٢ ) . وأكثر من ذلك أن مثل هذا التعبير يظل صادقاً صدقاً منطقياً إذا أضفنا إليه عن طريق الفصل أى عدد من متغيرات القضايا مهما تكن قيم الصدق الخاصة بها . أو بعبارة أخرى ما دامت (س V ∽ س) تحصيل

حاصل فكذلك تكون (س V ∼ سVص ) وكذلك تكون أيضاً ( س V ∼ س V ص V ل V ٠٠٠ )

ومن الواضح إذا شئنا تقديم مثال ملموس أنه ما دام قولنا

( إما أن السماء تمطر أو أنها لا تمطر )

صادقاً منطقياً فكذلك الأمر فيما يتعلق بقولنا

( إما أن السماء تمطر أو أنها لا تمطر أو أن ٢ × ٢ = ٥ )

فإذا فحصنا الأمثلة الثلاثة المتقدمة فى أشكالها الوصلية العادية :

(اَ ) (سV ∼ سVص) ٠ ( ∼ سV ص V ∼ ص) ،

(بَ) ( س V ∼ سVصVل ) ٠ (سV ∼ س VلV ∼ ل )

( ∼ سVصV ∼ صVل) ٠ ( ∼ سV ∼ صVلV ل ) ؛

( حـ ) (سVسV ∼ ص ) ٠ ( سV ∼ صV ∼ ص ) ؛

فسنرى أن كل عنصر من عناصر الوصل يكون فى الحالتين الأوليين ( اَ ، بَ ) صادقاً منطقياً . وذلك لأن كل عنصر منهما يحتوى على متغير قضائى وعلى نفيه كعناصر للفصل .

مثال ذلك أن طرف الوصل الأول فى (اَ ) يحتوى على ( س V ∼ س ) ويحتوى طرف الوصل الثانى فى (بَ ) على ( ص V ∼ ص ) . إذن فكل عنصر من عناصر الوصل صادق منطقياً وبالتالى يكون التعبير بأكمله فى كل حالة صادقاً منطقياً . أما فى الحالة ( جَ ) فلا يتوافر هذا الشرط . وبالتالى تصبح (جَ) غير صادقة منطقياً .

ويمكننا تلخيص الموضوع على النحو التالى :

( ١ ) (سV ∼ س) صادقة منطقياً

( ٢ ) إذا كانت (س) صادقة منطقياً إذن (سV صٓ)(١) صادقة منطقياً .

---

( ١ ) نحن نضع صٓ هنا للإشارة إلى ما هو مكتوب بالحروف الكبيرة أو ما نسميه بحروف التاج فى اللغة العربية وسنتبع هذه العادة دائماً بوضع العلامة « ٨ » فوق الحرف إذا كان بالحرف الكابيتال فى الأصل .

(٣) إذا كان كل من س^ ، ص^ صادقين منطقياً كان (س^ . ص^) صادقاً .

( هنا نأخذ الحروف الكبيرة الكابيتال (س^) ، (ص^) لتقوم مقام أى متغير قضوى منفى كان أو غير منفى أو أى تعبير خاص بالصدق القضوى مركب من المتغيرات القضوية ) .

## ٨ ــ المجموع الكلى لتعبيرات الصدق القضوى :

شوهد مما تقدم أننا عندما نعمد إلى تقويم تعبير صدق الدالة عن طريق إقامة جدول الصدق الخاص به نكون بذلك بصدد تحديد قالبه الرقمى المميز له .

وعلى ذلك فالقالب الرقمى الخاص بقولنا (س v ص) وهو ١١١٥ والقالب الرقمى الخاص بقولنا :

[س . (ص v ل)] هو 11100000 .

ورأينا أيضاً أن أى تعبيرين أو أكثر من التعبيرات المتكافئة منطقياً يملكان عين القالب الرقمى وبخاصة أن كل التعبيرات تحصيل الحاصل يكون قالبها الرقمى ١١١١ فى حالة الدالات ذات المتغيرين ويكون قالبها الرقمى ١١١١١١١١ للدالات ذات الثلاثة متغيرات وهكذا . ولنفرض الآن أننا نسأل هذا السؤال :

ــ كم عدد دالات الصدق غير المتكافئة الموجودة فى حساب القضايا ؟

ومن الواضح أن الرد على هذا السؤال سوف يعتمد على عدد المتغيرات القضوية التى نسمح بوجودها فى الحساب . أما فيما يتعلق بأى رقم مقرر من

المتغيرات فالأمر سهل للغاية . وذلك لأن عدد تعبيرات دوال الصدق غير المتكافئة سيكون هو عدد القوالب الرقمية المختلفة .

وبهذا فعندما نصرف اهتمامنا إلى متغيرة قضوية واحدة فقط سيكون لدينا أربعة قوالب رقمية ممكنة : ١١ – ١٥ – ٥١ – ٥٥ وتلك هى الأرقام الخاصة بكل من المتغيرات التالية :

– س ٧ ـــ س

– س

– ـــ س

– س ٠ ـــ س

وقد رأينا من قبل أننا نحتاج إلى قالب رقمى من أربعة أرقام من أجل تعبيرات دوال الصدق ذات المتغيرين . وعلى ذلك فيسصبح عدد التعبيرات غير المتكافئة التى تحتوى على س ، ص هو نفس الطرق التى يمكن أن تملأ أربعة أماكن إما بإحدى العلامتين ( ٥ ) أو ( ١ ) أو بكليهما معاً . ومن الواضح أنها ستصير $٢^{٤}$ أو ١٦ طريقة ما دامت هناك طريقتان لملء المكان الأول وطريقتان لملء المكان الثانى على أن تتآلف كل منها مع الطريقتين الأوليين لملء المكان الأول وهكذا إلى آخره . .

وإذا تقدمنا على نفس هذا المنوال وجدنا أنه إذا توافرت ثلاثة متغيرات س ، ص ، ل فستوجد لدينـــا $٢^{٨}$ أى ٢٥٦ تعبيراً ممكناً من التعبيرات غير المتكافئة . وإذا توافرت لدينا أربعة متغيرات فستوجد لدينا $٢^{١٦}$ أى ما يعادل ٦٥,٥٣٦ . وإذا حاولنا أن نفحص الصيغة العامة المتعلقة بصدد ( ـــ ) من المتغيرات لنرى ما سوف تؤول إليه نجد أن قوى ٢ فى كل من $٢^{٢}$ ، $٢^{٤}$ ، $٢^{٨}$ ، $٢^{١٦}$ المستعملة عاليه هى نفسها القوى المتوالية العددية الخاصة

بالعدد ( ٢ ) مثل ٢^١ ، ٢^٢ ، ٢^٣ وهكذا إلى آخره . وعلى ذلك فالعدد الخاص بتعبيرات دوال الصدق غير المتكافئة فى حساب القضايا يمكن أن تتمثل على النحو الآتى :

يوجدعدد ٢^(٢^١) أو ٢^٢ أو ٤ من الدوال غير المتكافئة لكل متغير واحد .

يوجدعدد ٢^(٢^٢) أو ٢^٤ أو ١٦ من الدوال غير المتكافئة لكل متغيرين .

يوجد عدد ٢^(٢^٣) أو ٢^٨ أو ٣٢ من الدوال غير المتكافئة لكل ثلاثة متغيرات .

وبعامة سيوجد عدد ٢^(٢^ــ) من الدوال غير المتكافئة فى ( ــ ) من المتغيرات .

## ٩ — الاشتقاق الاستبدالى :

يتلخص منهج جداول الصدق ومنهج الأشكال العادية فى إجراءات الاستبدال القاطع التى يمكن أن تطبق على صيغ معينة كمحك لصحتها المنطقية . فهذه المناهج من شأنها أن تفيدنا بصدد أية صيغة عما إذا كانت تحصيل حاصل أم لا . ولكن يوجد منهج آخر يمكن أن نكشف عن طريقه كيف تتبع إحدى النتائج مقدماتها وكيف تكون لذلك صيغة معينة من الشكل الآتى :

١ — ( ٨س ١ . ٨س ٢ . ٨س ٣ ..... ٨س ــ ) ⊃ ٨ص

صحيحة منطقياً . وهذا هو منهج اشتقاق النتيجة من المقدمات عن طريق استخدام الصيغ السابق اعتماد صحتها المنطقية .

( من أهم هذه الصيغ ما سبق أن قررناه فى الفقرة السادسة كصيغ أساسية . وتسمى هذه الصيغ فى بعض الأحيان عن طريق الخطأ بالقوانين المنطقية ) . على أن منهج الاشتقاق الاستبدالى كما سنشرحه فيما يلى ليس إجراء استدلال

قاطع . وذلك لأنه لن يعيننا على اكتشاف ما إذا كانت أى صيغة من الصيغ صحيحة منطقيًا أم لا . كل ما فى الأمر هو أنه سيعمد إلى معاونتنا على إظهار ما إذا كان يمكن اشتقاق إحدى الصيغ من عدد من المقدمات إذا كانت هى فى الواقع قابلة لأن تشتق منها . وبهذا فهى توفر لنا منهجاً مفيداً لاختبار صحة البراهين .

وعلينا أن نقرر فى استخدام هذا المنهج أنه إذا كان من الممكن الحصول على إحدى الصيغ من صيغة أخرى بواسطة استبدال الصيغ المعروفة بأنها متكافئة فيما بين بعضها وبعض فلابد أن تكون الصيغة الأصلية متكافئة مع الصيغة المشتقة بالاستبدال .

**مثال ذلك :**

( ٢ ) س . ( ص v ل )

معروفة بأنها متكافئة وفقاً للصيغة الأصلية رقم ١٢ مع :

( ٣ ) ( س . ص ) v ( س . ل )

فعلينا إذاً أن نكتب رقم ( ٣ ) حيثما وجدنا رقم ( ٢ ) والعكس بالعكس . وسوف نجد تسويغ ذلك فيما بعد . أما الآن فسوف نأخذ به بغير إثبات .

وعلى ذلك فأى تعبير من الشكل :

( ٤ ) ( س̂ ⊂ ص̂ ) ≡ ( ل̂ v ط̂ )

ونحن نعرف من الصيغ الأساسية مثلا أن ( ص̂ ≡ م̂ )

وأن ( ل̂ ≡ ~ ه )

يكون فى إمكاننا بالتالى أن نكتب المثل رقم ( ٤ ) كالآتى :

( ٥ ) ( س̂ ⊂ م̂ ) ≡ ( ~ ه̂ v ط̂ ) .

وبذلك سوف نقرر أكثر من هذا أنه وفقاً للصيغ الأصلية رقم ١٩ ، ٢٠ يكون :

أولا : إذا وجدت لدينا تعبيرات شرطية من الشكل (س̂ ⊃ ص̂) والشكل (ص̂ ⊃ ل̂) يمكننا بالتالى أن نؤكد الشرطية الثالثة (س̂ ⊃ ل̂)

ثانياً : إذا كان لدينا شرطية مثل (س̂ ⊃ ص̂) ومقدمة أولى مثل (س̂) يمكننا أن نؤكد العبارة التالية (ص̂) . ويمكن تسويغ هذه التأكيدات ولكنها من الوضوح بحيث يمكن تأكيدها هنا بغير إثبات .

ودعنا ننظر الآن فى النماذج التالية :

(٦) إذا غادر « أ » المدينة فمن الخطأ إذن أنه برىء وفى أمان من القبض عليه فى آن معاً . فإذا كان ينزل فى رأيه على حكم قرائه فهو إذن برىء . وإذا كان بريئاً فهو إذن فى أمان من القبض عليه . وسينزل فى رأيه لحكم قرائه . إذن فسوف لا يغادر « أ » المدينة .

ولنحاول الآن وضع العبارات الواردة فى (٦) بالرموز على النحو الآتى :

ا = ا سوف يغادر المدينة

ى = ا برىء

س = ا فى أمان من القبض عليه

ب = ا سوف يذعن فى رأيه لحكم قرائه

وبالتالى نحاول تمثيل المقدمات الأربع والخاتمة كالآتى :

(١) ا ⊃ ~ (ى . س)

(٢) ب ⊃ ى

(٣) ى ⊃ س

(٤) ب .

إذن : ~ ا

ويمكن اشتقاق الخاتمة بالاستبدال كالآتى :

(٥) (ى . س) ⊂ ~ ا (من (١) باستخدام ص أ ٧ ، ١٦)

(٦) ى (من (٢) ، (٤) باستخدام ص أ ٢٠)

(٧) س (من (٣) ، (٦) باستخدام ص أ ٢٠)

(٨) ~ ا (من (٦)،(٧)،(٥) باستخدام ص أ ٢٠)

(٧) إذا انخفض سعر أسهم الذهب أو أخفقت عمليات المزاحمة فلابد أن يفلس خليل أو أن ينتحر. فإذا أخفقت عمليات المزاحمة أو أفلس خليل فسيكون هناك إذن محاكمة . ولن تجرى محاكمة . وسينخفض سعر أسهم الذهب . إذن فسوف ينتحر خليل .

وسنضع العبارات الخاصة برقم (٧) فى رموز كما فعلنا من قبل على النحو التالى :

جـ = سينخفض سعر أسهم الذهب .

ف = ستخفق عمليات المزاحمة

ع = سوف يفلس خليل

س = سوف ينتحر خليل

د = سوف تجرى محاكمة .

ويمكن أن يوضع البرهان كالآتى :

(١) (جـ v ف) ⊂ (ع v س)

(٢) (ف v ع) ⊂ د

(٣) ~ د

(٤) جـ

إذن : س

(٥) ـــ د ⊃ ـــ (ف v ع) (من (٢) بواسطة ص ا ١٦)

(٦) ـــ (ف v ع) (من (٥) ، (٣) بواسطة ص ا ٢٠)

(٧) ـــ ف • ـــ ع (من (٦) بواسطة ص ا ١٤)

(٨) ـــ (جـ v ف) v (ع v س) (من (١) بواسطة ص ا ١٧)

(٩) (ـــ جـ • ـــ ف) v (ع v س) (من (٨) بواسطة ص ا ١٤)

(١٠) (ع v س v ـــ جـ) • (ع v س v ـــ ف) (من (٩) بواسط ص ا ١٣)

(١١) (ع v ـــ جـ v س) (من (١٠) بواسطة ص ا ٤ ، ٩)

(١٢) ـــ (ع v ـــ جـ) ⊃ س (من (١١) بواسطة ص ا ١٧)

(١٣) (ـــ ع • جـ) ⊃ س (من (١٢) بواسطة ص ا ١٤)

(١٤) س (من (٧) ، (٤) ، (٨) بواسطة ص ا ٢٠)

(٨) من الخطأ أن هروب ا يستلزم أن يكون ا مذنباً ، فإذا كانت الأدلة مسجلة بدقة لم يكن البوليس إذاً منصفاً . إذن إذا كان ا قد فرّ هارباً وكانت الأدلة مسجلة بدقة ، وإذن إذا كان البوليس منصفاً ، كان ا مذنباً .

ويلاحظ أنه توجد مقدمة وحيدة فقط وأن النتيجة مكافئة لها إذن وليست مستلزمة وحسب بواسطة المقدمة . وقد نتمثل البرهان كالآتى :

(١) ـــ (ف ⊃ جـ) ⊃ (د ⊃ ـــ ى)

إذن : (ف • د) ⊃ (ى ⊃ جـ)

(٢) (ف ⊃ جـ) v (د ⊃ ـــ ى) (من (١) بواسطة ص ا ١٧)

(٣) (ـــ ف v جـ) v (ـــ د v ـــ ى) (من (٢) بواسطة ص ا ١٧)

(٤) (ـــ ف v ـــ د v ـــ ى v جـ) (من (٣) بواسطة ص ا ٩ ، ١١)

(٥) ـ (ف • د) v (~ ى v جـ) (من (٤) بواسطة ص ا ١٤)

(٦) (ف • د) ⊂ (ى ⊂ جـ) (من (٥) بواسطة ص ا ١٧)

تعد البراهين ما بين (٦) ، (٨) المذكورة هنا صالحة وسليمة منطقياً وثبتت سلامتها باستخدام الصيغ الأساسية . ولا يمكن على أى حال أن نثبت بطريقة حاسمة على هذا النحو أن أى برهان غير سليم منطقياً .

وسوف نخفق ولا شك إذا كان البرهان غير صالح أو غير سليم منطقياً فى أن نقوم بأى استبدالات تؤدى إلى النتيجة المطلوبة . ومع ذلك لا نستطيع دائماً أن نستوثق ونتأكد ــ فى حالة تعقد البرهان ــ من أن إخفاقنا فى بلوغ الهدف لا يرجع فقط إلى عدم قدرتنا على رؤية الاستبدالات التى ينبغى أن نقوم بها . ولكن فى الحالات البسيطة من البراهين غير الصحيحة منطقياً يصبح من الواضح بعد خطوات قليلة أنه لا يمكن بلوغ النتيجة .

فمثلا :

(٩) إذا تم انتخاب ا فسيستقيل ب . وإذا تم انتخاب جـ فلن يستقيل ب . فإذا تم انتخاب ا فلن يتم انتخاب جـ . إذن : فسوف يستقيل ب .

وأمامنا :

(١) ا ⊂ ب

(٢) جـ ⊂ ~ ب

(٣) ا ⊂ ~ جـ

إذن ب

ويصبح من الواضح بمجرد تشكيل البرهان صورياً أنه لن يمكن إطلاقاً إثبات النتيجة الحملية (ب) من المقدمات الثلاث التى تعد جميعها شرطية . وبالإضافة إلى ذلك لا يمكن أن يكون الوضوح الذاتى على الإطلاق مرشداً يعتمد عليه كاختبار للسلامة المنطقية ومن المرغوب فيه دائماً فحص نتائج

البداهة عن طريق اختبار أكثر موضوعية . فإذا شككنا فى أن البرهان الذى نختبره بهذه الوسائل غير سليم منطقياً أمكننا دائماً الرجوع إلى إجراء من إجراءات الاستدلال القاطع كيما يعطينا إجابة صريحة لا لبس فيها .

## ثبت المراجع للفصلين الثانى والثالث

يمكن العثور على تناول طيب لمنهج جداول الصدق الخاصة بالاستدلال القاطع فى كتاب أمبروز ولازيروفيتش ( ١ ) وكولى ( ٧ ) ورايشنباخ ( ٢٥ ) ويوجد عرض تقليدى لحساب القضايا لدى كل من هيلبيرت وأكرمان ( ١٢ ) غير أنه لابد من ملاحظة أن طريقة العرض شديدة التركيز وتتطلب دراسة واعية .

*الفصل الرابع*

# منهج البديهيات

## ١ ــ الغرض من منهج البديهيات :

من شأن إجراءات الاستدلال القاطع التى ناقشناها من قبل أن تعيننا على تمييز تعبيرات دوال الصدق التى تعد تحصيل حاصل أو بمثابة القوانين المنطقية مما عداها . غير أن هذه الإجراءات لا تمنحنا أى وسيلة من أجل إقامة عبارات تحصيل الحاصل وإنشائها [1] .

ولهذا فإن حاجاتنا إلى إجراء آخر من نوع مختلف ماسة . وقد ذلل لنا هذا المطلب منهج البديهيات . وهو منهج مألوف لدى معظم الناس فى صورته غير الناضجة فى هندسة إقليدس .

ولاستخدام منهج البديهيات نعمد إلى اختيار عدد من القضايا المعروفة باسم البديهيات ( أو المصادرات ) كنقطة ابتداء ونشرع نستنبط قضايا أخرى ( تعرف باسم أحكام البداهة Theorems ) من البديهيات بمساعدة بعض التعريفات .

واستخدام منهج البديهيات فى المنطق مشابه لذلك ، ولكننا نحتاج إلى حرص وتخصيص أكبر فيما يتعلق بنقطة البدء عما كان مطلوباً فى هندسة إقليدس . إذ أن هندسة إقليدس تأخذ بالمسامحات بدون أن تذكر الإجراءات العادية للاستدلال

---

( ١ ) لم نحاول وضع المصطلحات الإفرنجية إلى جانب مقابلها العربى إلا قليلا وذلك حرصاً على استرسال تفكير القارئ وعلى تعويده الأسلوب العربى . ومن ناحية أخرى حاولنا أن نستبقى الرموز وأشكال العبارات المنطقية الصورية فى أقرب وضع مما هو متبع فى الكتب الأجنبية من أجل إمكان مواصلة الطالب قراءاته للموضوع باللغات الأخرى . (المترجم) .

الهندسى . وقد لا نقوم بذلك بطبيعة الحال عند إنشاء أساس من البديهيات فى جزء من المنطق نفسه .

وقبل أن نتقدم نحو وضع أساس النسق الخاص بالبديهيات ونحو استخدامه فى إقامة الاستدلالات قد يكون من الأفضل أن نعيد الاتفاق مرة أخرى من أجل توضيح الغرض من منهج البديهيات . وقد رأينا أن تعبيرات دوال الصدق الخاصة بحساب القضايا يتم بناؤها ابتداء من ثلاثة أنواع مختلفة من المواد الأساسية :

أولا : متغيرات قضوية .

ثانياً : ثوابت منطقية .

ثالثاً : أقواس تفصح عن « مجال » الثوابت المنطقية «The scope» .

وليس من المسموح به على أى حال أن نضع هذه المواد بعضها مع بعض على النحو الذى يرضينا . فبعض التأليفات من هذه المواد تقيم تعبيرات دوال الصدق وبعضها الآخر لا يؤدى إلى نفس النتيجة .

مثال ذلك :

( س ⊃ ص ) ≡ ( ~ ص ⊃ ~ س )

وكذلك ( س v ص ) ⊃ ل

كلاهما من التعبيرات المسموح بها .

أما :

( ⊃ ~ ص س )

أو ( س ~ ≡ ص ⊃ )

فغير مسموح بها .

وقد نظرنا إلى هذا الاختلاف على أنه واضح بالبداهة ولكننا نود أن نشير

إليه الآن إشارة ظاهرة . وسنفعل ذلك عن طريق وضع كل التأليفات الممكنة من المواد الأساسية فى صنفين متميزين :

**أولا** : التعبيرات المسموح بها أو ذات المعنى وتسمى بالصيغ ذات التكوين الصحيح .

**ثانياً** : تأليفات غير ذات معنى أو غير مشروعة مثل س ≡ ٠ ٧ ص ٧

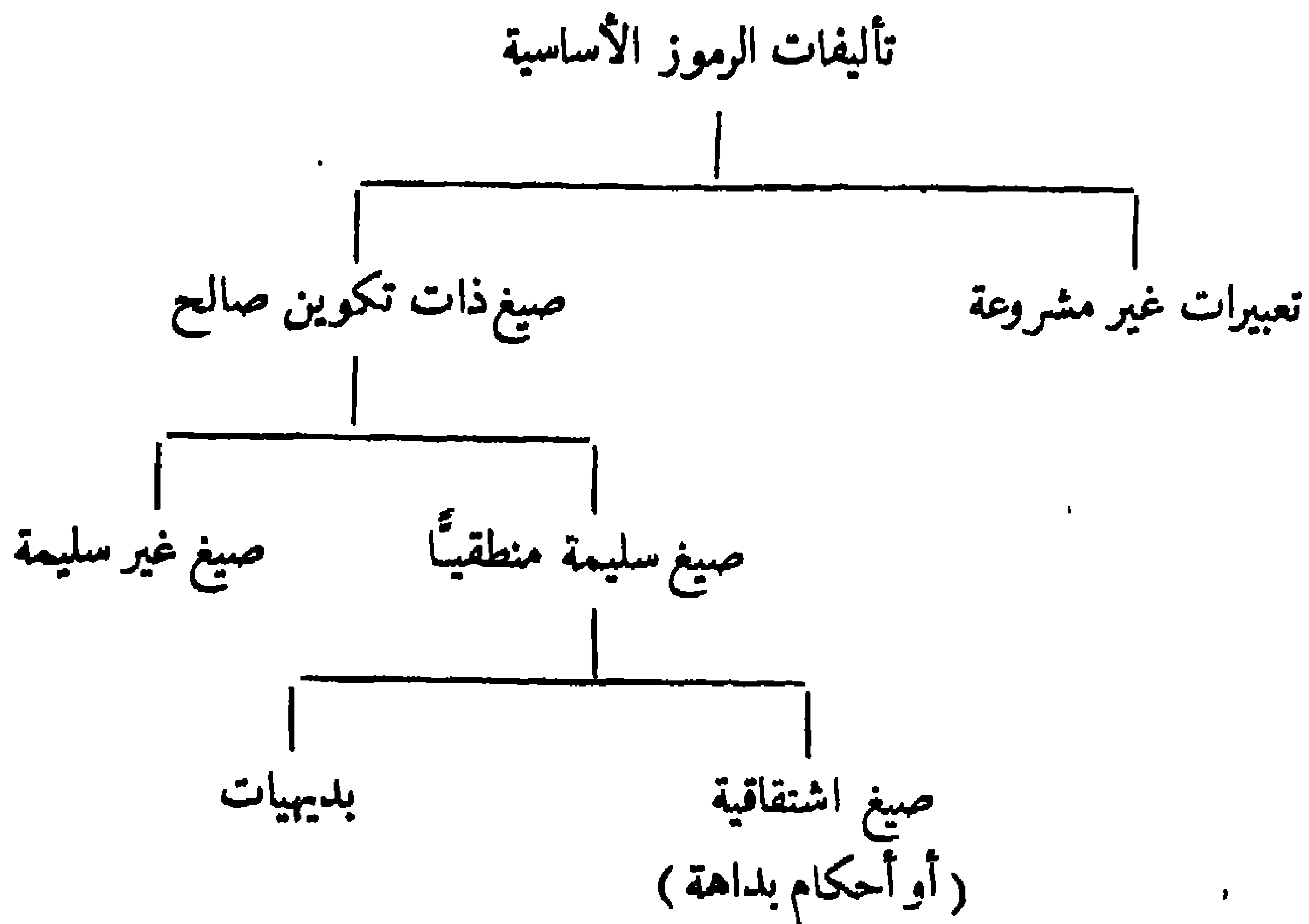
ويمكن تقريب الفكرة بواسطة الفارق المشابه فى اللغة العادية بين الجمل المقامة وفقاً لقواعد النحو والتركيب ( السنتاكس ) وعبارات حشد الألفاظ وحسب مثل : ( جدا القط بين يكون أى فوق ) مما يسمى عادة بالعبارات التى لا معنى لها . وتوضيح الفارق الدقيق بين العبارات ذات المعنى والعبارات الخالية من المعنى فى اللغة العادية ليس بالأمر الهين برغم أن أطراف العبارات الخالية من المعنى واضحة بما فيه الكفاية : أما فى المنطق فمن الممكن لحسن الحظ إقامة فارق مشابه ذى دقة متناهية بفضل قواعد محددة .

ونجد أنفسنا معنيين بنوع واحد فقط من بين هذين النمطين من التعبير وهو بطبيعة الحال النمط الخاص بالصيغ ذات التكوين الصالح . ولكن هذا النمط ينقسم بدوره إلى صنفين هما صنف العبارات تحصيل الحاصل أو العبارات الصادقة منطقياً ( وهى التى تتميز بأنها فقط ( ١ ) فى العمود الرئيسى من جداول الصدق الخاصة ) وصنف آخر هو صنف العبارات التى لا تصدق منطقياً وإنما تكون إما متناقضة أو جائزة ( محتملة ) ومرة أخرى نجد أنفسنا معنيين أولا وقبل كل شىء بالصنف الأول من هذين الصنفين .

ونحن نستخدم منهج البديهيات من أجل بناء تعبيرات تحصيل حاصل بأكملها على أساس بعض المواد الضرورية المبدئية .

ويمكننا أيضاً تقسيم هذه التعبيرات الأخيرة إلى تلك التى نأخذها كنقطة ابتداء فى نسق البديهيات الذى نقيمه وتلك التى ندعها إلى أن تثبت صحتها فى النسق . ونطلق على أعضاء المجموعة الأولى اسم البديهيات ( أو المصادرات) ونطلق على أعضاء المجموعة الثانية اسم الصيغ الاشتقاقية أو أحكام البداهة .

ويمكننا تمثيل العلاقات بين مختلف تلك الأنماط من التعبيرات على النحو الآتى :




والمواد الأساسية التى نحتاج إليها من أجل بناء نسق البديهيات هى كالآتى :

١ — قواعد تركيب (سنتاكس) .

٢ — تعريفات .

٣ — بديهيات .

وسننظر الآن فى كل منها بدوره .

### ٢ — بناء نسق البديهيات :

### قواعد التركيب اللغوى أو السينتاكس :

لفظة سينتاكس أو التركيب اللغوى من الألفاظ التى يجرى استخدامها فى المنطق شأن أى مصطلح فنى أصيل وإن كان هذا المعنى الفنى الخاص يماثل معناه أيضاً فى اللغة العادية[١] . ويشير المعنى الأصلى للفظة « سينتاكس » وفقاً لما جاء بقاموس أكسفورد الإنجليزى إلى (تنظيم الأجزاء أو العناصر تنظيماً نسقيًّا أو تنظيماً ترتيبيًّا ) وبمضى الوقت صار استخدام هذا اللفظ أكثر تخصصاً وأصبح معناه المقبول عادة كما يشير إليه نفس هذا القاموس هو (تنظيم الألفاظ فى صور وأشكال مناسبة تظهر ارتباطها وعلاقتها داخل العبارة ) .

أما فى المنطق فكلمة «السينتاكس المنطقى» (أو كما يقال باختصار السياق ) تشير إلى القواعد التى تتحكم فى العلاقات بين الرموز المنطقية . ويوجد صنفان رئيسيان من هذه القواعد . الصنف الأول من هذه القواعد يتحكم فى بناء القضايا ذات التكوين الصحيح (وهى ما نشير إليه باختصار بالحروف ق ت ص) ، وتعرف باسم قواعد التكوين . ويحتاج إلى صنف آخر من القواعد لتحديد لحظة إمكان تسمية القضية باسم القضية المترتبة على ما قبلها أو باسم القضية التى تتبع ما قبلها . ويعرف هذا الصنف الآخر باسم قواعد التحويل[٢] . ولعلنا ننظر الآن فى هذه القواعد بالتفصيل .

---

(١) من المؤكد أن معظم الأفكار الواردة فى هذا الكتاب أفكار بسيطة أولية مر بها طالب الفلسفة فى أوليات دراسته . وقد عرف بموضوع السنتاكس فيلسوف من حلقة فيينا هو رودلف كارناب ويمكن الرجوع إلى مؤلفاته للتوسع فى صلة السنتاكس بالمنطق الرمزى . (المترجم)

(٢) الأفكار والمصطلحات المنطقية الواردة فى هذا الكتاب يلم بها الطالب الأوربى فى المرحلة الثانوية إلماماً كاملا وبخاصة فى فرنسا حيث الفلسفة مادة أساسية واسعة فى المرحلة التوجيهية وتشكل دراستها مقدمة لكافة أفرع الفلسفة . (المترجم)

**١ ـ قواعد التكوين :**

**أولا : قاعدة التكوين التركيبي الأولى (ق ت ت رقم ١ ) :**

( هذه القاعدة تحدد المقولات أو التصورات الأولية الخاصة بحساب القضايا).

توجد ثلاث مقولات من هذا القبيل :

( ا ) الرموز س ، ص ، ل ...(أو بدلا من ذلك على التوالى س ١ ، س ٢ ، س ٣ ...... س ن ) تقوم كلها مقام متغيرات القضايا بمعنى أنها تمثل أى قضية مهما كانت بحياد تام .

(ب) الثوابت المنطقية وتتألف من ثابتة تسبق الحد هى ( ~ ) ومن الثوابت الأخرى ذات الحدين هى ( . ) ، ( v ) ، ( ⊂ ) و ( ≡ ) .

(حـ) تصور « مجال الثوابت » المعبر عنه بالأقواس مثل ( .... ) .

**ثانياً : قاعدة التكوين التركيبي الثانية ( ق ت رقم ٢ ) :**

(هذه القاعدة تتحكم فى إنشاء الصيغ السليمة ويشار إليها بالحرفين ص س )

( ا ) المتغير القضوى هو (ص س) .

(ب) إذا كانت ( س) توصف بأنها (ص س )

كانت ( ~ س) أيضاً (ص س )

(حـ) كل اثنتين من الصيغ السليمة الموصولتين بثابت ذى حدين يمثلان (ص س) جديدة .

( على ذلك إذا كان ($\hat{س}$) ، ($\hat{ص}$) كلاهما (ص س )

كانت بالتالى ($\hat{س}$ . $\hat{ص}$) ، ($\hat{س}$ v $\hat{ص}$ )

، $(\hat{س} \supset \hat{ص})$ ، $(\hat{س} \equiv \hat{ص})$

كلها أيضاً من الصيغ السليمة (ص س)

**ثالثاً : قاعدة التكوين التركيبي الثالثة (ق ت ت رقم ٣) :**

(تحدد هذه القاعدة كيفية تنقيط عبارات حساب القضايا حتى لا تكون غامضة وكيفية فهم وتقدير مجال الثوابت).

(١) تختلف القوة النسبية الخاصة بالثوابت ذات الحدين بالتدريج حسب الترتيب الآتى من الأقوى إلى الأضعف :

$$\equiv \quad \supset \quad \vee \quad \cdot$$

مثال ذلك العبارات التالية :

١ ـ س · ص $\supset$ ل $\vee$ ط

٢ ـ س · ص $\vee$ ل $\equiv$ ط

٣ ـ س $\supset$ ص · ل $\vee$ ~ ط

تتحقق قراءتها على ذلك النحو بغير أقواس كما لو كانت ذات أقواس كالآتى :

١َ ـ (س · ص) $\supset$ (ل $\vee$ ط)

٢َ ـ [(س · ص) $\vee$ ل] $\equiv$ ط

٣َ ـ س $\supset$ [(ص · ل) $\vee$ ~ ط]

(ب) حيثما جرى استخدام الأقواس من أجل تحديد مجال الثوابت (سواء من أجل تفادى الغموض أو من أجل تيسير الفهم) كان من الضرورى تطبيق القواعد الآتية :

١ ـ إذا تلا الثابت (~) متغير قضوى بطريقة مباشرة كان مجال (~)

محدوداً بذلك المتغير وإذا جاء بعدها قوس مفتوح « ( » امتد مجال ( ــ ) إلى القوس النهائى المقفل . ( ارجع إلى الأمثلة فى الفصل الثالث — الفقرة الثانية — فيما سبق ) .

٢ — وإذا تقدم إحدى الثوابت ذات الحدين متغير قضوى كان مجال الثابتة فى هذا التساند مقيداً بذلك المتغير . وإذا تقدمت إحدى الثوابت ذات الحدين قوساً مفتوحاً امتد مجال تلك الثابتة حتى القوس النهائى المقفل . ( انظر الأمثلة المذكورة من قبل ) .

٣ — تعريف القوس المناظر المفتوح هو رقم ( ن + ١ ) بالنسبة إلى القوس المقفل الذى يتلو عندما تجىء ( ن ) الخاصة بالقوس المفتوح . وبالتماثل يكون رقم القوس المناظر المقفل هو ( ن + ١ ) بالنسبة إلى القوس المفتوح السابق عندما تجىء ( ن ) الخاصة بالقوس المقفل ) .

لنأخذ العبارة على سبيل المثال[١] :

[ ( ( س ⊂ ص ) ⊂ ( س ⊂ ل ) ) ⊂ ( ص ⊂ ل ) ] V ( ط V م )

فههنا نجد أن القوس المقفل المناظر للقوس المفتوح الأول هو القوس المقفل الخامس . والقوس المفتوح المناظر للقوس الثالث المقفل هو الثانى . . . وهكذا دواليك .

(١) نضع القوس الكبير « [ ] » كبداية كبرى ونهاية كبرى إذا جاءت بينه أقواس صغرى لمجرد التخفيف على الملاحظة والقراءة وإن كان المؤلف يستعمل دائماً الأقواس الصغرى . ويلاحظ أن الأقواس لها دور أساسى لأنها تشير إلى مجالات الثوابت داخل الصيغ القضوية وسوف يأتى شرحها فيما بعد وسنخصص القوس المتوسط بشكل { إذا كان هناك قوس أصغر ثالث « ( » فى العبارة ( المترجم ) .

رابعاً : قاعدة التكوين التركيبي الرابعة (ق ت ت رقم ٤) :

الرموز الميتامنطقية :

سوف تستخدم حروف التاج سٓ ، صٓ ، لٓ ..... كرموز ميتامنطقية . ويمكن اعتبار هذه الرموز كصف ثان من المتغيرات التي تتكون قيمها كصيغ سليمة ( يشار إليها بالحرفين ص س ) وفقاً لقاعدة التكوين التركيبي ( ق ت ت ) الثانية الواردة من قبل . وعلى ذلك فهذه الرموز تستخدم لتمثيل القضايا التي تبقى صورها المنطقية بلا تحديد . ( انظر مثلا لذلك في استخدامها على نحو ما جاء في الفصل الثالث ــ الفقرة السابعة فيما تقدم ) .

تستطيع ( سٓ ٧ صٓ ) إذن أن تقوم عادة مقام أي صيغة سليمة (ص س) ذات ثابتة من ثوابت الشرط المنفصل التي تتميز بمجالها الواسع . وبالمثل تستطيع (ـــ سٓ) أن تقوم مقام أي تعبير منفي .

ونلجأ إلى الرموز من هذا النوع من أجل التعبير عن قواعد التحويل الخاصة بالنسق في صورة عامة . وليست هذه الرموز مما يجري استعماله في نسق البديهيات وإنما تطلب لكي تكون بمثابة الكلام عن النسق . ويقال إذن إنهـــا تنتمي إلى « الميتالغة » الخاصة بمنطق القضايا .

٢ ــ قواعد التحويل :

أولا : قاعدة استبدال التوافق (ق ح رقم ١ ):

وهي أن تحل أي صيغة سليمة محل أي متغير قضوي خلال التعبير .

مثال ذلك أن العبارة ،

[ (س ⊂ ص ) . ـــ ص ] ⊂ ـــ س

يمكن أن تكتب على النحو التالى :

[((س V ص) ⊃ ص) • ∽ ص] ⊃ ∽ (س V ص)

مع إحلال (س V ص) محل المتغير س خلال التعبير الأول . ونعبر عن الواقعة الخاصة بهذا الاستبدال الذى تم ههنا بكتابة «(س V ص)/ س» إلى جانب الصيغة الجديدة(١) .

**ثانياً : قاعدة «النقل عن» بواسطة التعريف (ق ح رقم ٢) :**

يمكننا أن نستبدل بأى جزء فى الصيغ السليمة أو تحصيل الحاصل (أعنى فى أى بديهية أو أحكام بداهة) تعبيراً مكافئاً له بواسطة التعريفات الثلاث الواردة فيما بعد (من تف ١ حتى تف ٣)(٢) .

فمثلا بدلا من :

[(س ⊃ ص) • (ص ⊃ ل)] V (س ⊃ ل)

يمكننا أن نكتب الآتى :

∽[(س ⊃ ص) • (ص ⊃ ل)] V (س ⊃ ل)

وذلك وفقاً للتعريف الثانى (تف ٢) فيما يلى . وبالمثل يمكننا أن ندون نفس التعبير وفقاً لهذه القاعدة ولكن باستخدام (تف ١) كما يلى :

∽[∽(س ⊃ ص) V ∽ (ص ⊃ ل)] ⊃ (س ⊃ ل)

ويلاحظ هنا أن الاستبدال حسب (ق ح ٢) لا يحتاج لأن يتم خلال الصيغ كما هو الحال فى (ق ح ١) .

---

(١) ليست الشرطة الفاصلة هنا بطبيعة الحال هى الثابتة الخاصة بدالة الشطب (التى لم تلدرج هنا فى هذا النسق الخاص بالبديهيات) ولكنها تقوم بدور واحد وهو تمثيل عملية الاستبدال حسب ق ح رقم ١ . (المترجم) .

(٢) سيأخذ لفظ تعريف رمزاً محدداً هو «تف» على نحو ما سوف نرى فيما بعد .

**ثالثاً : قاعدة الاستخلاص (ق ح رقم ٣ ) :**

إذا كان « س̂ ⊂ ص̂ » و « س̂ » كلاهما تحصيل حاصل أو صيغ سليمة... كانت « ص̂ » أيضاً صيغة سليمة أو تحصيل حاصل[1] .

**رابعاً : قاعدة الإضافة (ق ح رقم ٤ ) :**

إذا كانت « س̂ » تحصيل حاصل أو صيغة سليمة وكانت « ص̂ » نفس الشيء . . . كان « س̂ . ص̂ » تحصيل حاصل أو صيغة سليمة .

وتكفى قواعد السنتاكس أو السياق الواردة عاليه لكى تعاون فى إقامة نسق البديهيات . ولكن من الممكن ومن المفيد كذلك البرهنة على قواعد أخرى للسنتاكس أو السياق كلما دعت الحاجة إلى ذلك[2] .

**٣ ــ التعريفات[3] :**

( تف ١ ) س̂ . ص̂ = ت ت ~ (~ س̂ V ~ ص̂)

( تف ٢ ) س̂ ⊂ ص̂ = ت ت ~ س̂ V ص̂

( تف ٣ ) س̂ ≡ ص̂ = ت ت ( س̂ ⊂ ص̂ ) . ( ص̂ ⊂ س̂ )

**٤ ــ البديهيات :**

فى مقدورنا اختيار عدد كبير جداً من البديهيات الخاصة بنسقنا . ولكن مهما كان اختيارنا فمن الضرورى أن نخضع فى اختيارنا ذاك لبعض الشروط :

---

(١) راجع الفقرة (٣) من الفصل الثالث .

(٢) انظر الفقرة (٤) من الفصل الثانى .

(٣) تخص هذه التعريفات وحدها بالحروف ( تف ) .

أولا : يجب أن تكون مجموعة البديهيات التى نختارها وننتقيها متميزة بالتوافق فيما بينهما . وهذا يعنى فى الواقع العلمى أنها لا بد أن تكون بحيث لا يمكن استنباط أحكام بداهة وعكسها منها عند تطبيق قواعد السنتاكس الواردة فيما تقدم ، إذ لو استطعنا أن نفعل ذلك لكان فى إمكاننا إثبات أى قضية كانت وصار منطقنا بالتالى غير قادر على تمييز القضايا السليمة من القضايا غير السليمة وتحقق أيضاً عدم جدواه .

وينبغى على الأخص أن تستحيل البرهنة على « س » كحكم من أحكام البداهة اعتماداً على بديهياتنا لأن ذلك سيعنى كما سوف نرى أن النسق غير محكم التوافق . وسنناقش هذه النقطة بتفصيل أكبر فى نفس الوقت مع برهان التوافق الخاص ببديهياتنا فيما بعد .

وهناك خاصية ثانية ينبغى أن تتميز بها مجموعة البديهيات إذا كان مطلوباً منها أن تخلق أساساً مقبولاً للنسق المنطقى . إذ ينبغى أن تخلق مجموعة البديهيات أساساً متكافئاً للبرهنة على كل تحصيلات الحاصل الخاصة بالمنطق موضوع الاهتمام . أو بعبارة اصطلاحية فنية يجب أن تكون البديهيات تامة .

والخاصية الثالثة لمجموعة بديهياتنا ، وإن تكن ضرورية بصفة قاطعة ، هى أنه من المستحب جداً برغم ذلك أن تتميز هذه البديهيات بالاستقلال . وبعبارة أخرى لا يمكن إثبات أى بديهية من تلك البديهيات كحكم بداهة بناء على أحكام بداهة أخرى ، وبالتالى لا تتصف أى بديهية من البديهيات بالتكرار والتطويل .

وسوف نتعرض فيما بعد لهذه المتطلبات فى تفصيل أكبر ، كما أننا سنبرهن على أن مجموعة البديهيات التى نختارها وننتقيها ستتوافر لها فى الواقع هذه الخصائص . أما البديهيات التالية فهى أربع من خمس بديهيات استخدمها هوايتهيد ورسل فى نسق منطق القضايا الذى ورد فى كتابهما البرنكيبيا أو أسس الرياضيات .

( وقد ثبت أن البديهية الخامسة غير مستقلة عن البديهيات الأربع الأخرى ) :

ب ١ – ( س ٧ س ) ⊃ س

ب ٢ – ص ⊃ ( س ٧ ص )

ب ٣ – ( س ٧ ص ) ⊃ ( ص ٧ س )

ب ٤ – ( ص ⊃ ل ) ⊃ [ ( س ٧ ص ) ⊃ ( س ٧ ل ) ]

وعند مواجهة هذه البديهيات لأول مرة نجد أخص ملامحها الملحوظة أنها تافهة . وتبرز هذه الخاصية بروزاً واضحاً جداً إذا قمنا بترجمة هذه البديهيات عن طريق إحلال قضايا معينة محل المتغيرات القضوية . مثال ذلك أن البديهية الأولى تحتمل القراءة وفقاً لهذه الترجمة على النحو التالي :

« إذا كانت السماء تمطر
أو أنها تمطر
فهي إذن تمطر »

وكذلك ( ب ٢ ) قد تترجم كما يلي :

« إذا كانت السماء تمطر ثلجاً
فهي إما أنها تمطر ماء
أو أنها تمطر ثلجاً »

وقد يدهش القارئ كيف يمكن أن تصير مثل هذه القضايا الفارغة الخالية من المعنى ذات قيمة ما بوصفها أساساً للنسق المنطقي .

ونجيب عن ذلك بأنه برغم أن المضمون الخاص بهذه البديهيات تافه فارغ فإن كل ما يترتب عليها من القضايا أو أحكام البداهة التي تستنبط منها وفقاً لقواعد السنتاكس ليست دائماً تافهة . وعلى ذلك فإذا كان نسق البديهيات تاماً فسوف

يكون أساساً للبرهنة على كل تحصيلات الحاصل فى النسق سواء كانت واضحة أو تبعث على الدهشة . وسنثبت فيما بعد أن هذا النسق كامل تام .

### ٣ ـ الصيغ المشتقة :

سوف نشير بقصد الإيجاز إلى مجموعات البديهيات والقواعد والتعريفات الواردة فيما سبق من الفقرات باسم نسق البديهيات أو للاختصار بحرْ ( ن ب) . ولكن علينا أن نوضح أولا على وجه التحديد ما هو المقصود بقولنا إن صيغة معينة هى صيغة مشتقة من ( ن ب ) أو يمكن البرهنة عليها داخل ( نْ ب) .

نفرض أنه توافرت لدينا صيغة ما ( ولتكن غ ) ونفرض أنه فى إمكاننا إقامة سلسلة من الصيغ س ١ ، س ٢ .... س ن ، غ إما أن تكون بديهية من ( ن ب ) أو ناتجة عن بعض المكونات السابقة فى السلسلة عن طريق التطبيق المنفرد لإحدى قواعد التحويل ( المعروفة باسم ق ح ١ ـ ٣ ) . فإذا توافرت لدينا مثل هذه السلسلة من الصيغ أطلقنا عليها اسم المشتقات أو البراهين الخاصة بالصيغة ( غ م ) داخل ( ن ب) .

وسيلمس القارئ أن هذا الشرط هو بمثابة التقرير المحدد الواضح لما نفهمه بداهة كبرهان داخل ( ن ب) . وعلى ذلك يقال إن ( غ م ) أو الصيغة يمكن اشتقاقها أو إثباتها داخل ( ن ب ) إذا توافر برهان عليها . وغنى عن البيان أنه قد تتوافر براهين كثيرة مختلفة بشأن نفس الصيغة .

**مثال :**

( س ⊐ ∽ س) ⊐ ∽ س

هذه عبارة عن صيغة مشتقة ( غ م ) من ( ن ب )

**البرهان :**

يمكن إنشاء سلسلة من الصيغ التى تبدأ بالبديهية الأولى ( ب ١ ) .

١ – ( س V س ) ⊂ س

وفقاً لقاعدة التحويل الأولى ( ق ح ١ ) نضع

( ~ س ) محل ( س ) فى (١) السابقة .

٢ – ( ~ س V ~ س ) ⊂ ~ س

ثم نضع (س ⊂ ~ س ) محل (~ س V ~ س ) فى ( ٢ ) السابقة

حسب ( تف ١ ) ؛ ( ق ح ٢ ) .

٣ – ( س ⊂ ~ س ) ⊂ ~ س

وهكذا تؤدى سلسلة الصيغ من (١) إلى (٣) إلى إنشاء برهان خاص برقم(٣)

داخل ( ن ب )

ويمكن إبراز العملية صوريًّا على الوجه التالى :

١ – ( س V س ) ⊂ س ( ب ١ )

٢ – (~ س V ~ س) ⊂ ~ س (١) ثم (ق ح ١) ثم (~ س / س)

٣ – (س ⊂ ~ س ) ⊂ ~ س (٢) ثم (ق ح ٢ ) ثم ( تف ١ )

على أننا سنحتاج فيما يلى إلى النظر بعين الاعتبار إلى أحكام البداهة عن (ن ب ) بالإضافة إلى الصيغ المشتقة منها . ذلك أن أحكام البداهة عن (ن ب) ليست هى نفسها الصيغ المشتقة . إنها أكثر من ذلك عبارة عن أحكام تقريرية صادقة تجعل من بعض الصيغ ما هو مشتق (أو غير مشتق ) وهكذا . ومن الواضح أن الاشتقاق بداخل (ن ب) يمكن أن يؤدى إلى إيجاد قابلية اشتقاق إحدى الصيغ داخل (ن ب ) . ولكن مهما كان عدد هذه الاشتقاقات فلن يؤدى ذلك إلى أن تصبح صيغة غير قابلة للاشتقاق أو إلى أن عدداً لا نهائيًّا من الصيغ من هذا النوع يصبح قابلا للاشتقاق . ولا بد لتأسيس أحكام بداهة من هذا النوع من تجاوز ( ن ب ) على نحو ما كانت عليه ورؤيتها من جديد كموضوع معروض للبحث .

ولن نعمد فيما يلى إلى اشتقاق عدد جزافى فى الصيغ ما دامت قيمتها فى حكم الشيء القليل الأهمية .

وبدلا من ذلك سنوجه جهودنا إلى إثبات حقائق معينة بشأن ( ن ب ) ، وأول حقيقة نسعى لإثباتها هى أن :

كل حكم تحصيل حاصل هو قضية مشتقة من ( ن ب ) .

وهذا من شأنه أن يثبت ما يسمى بالتمام فيما يتعلق بنسق البديهيات (ن ب) . فالتمام طابع مميز هام بشأن ( ن ب ) .

**٤ ــ ملاحظات أولية عن التمام[١] :**

كيف نثبت أن كل حكم تحصيل حاصل هو حكم قابل للاشتقاق ؟ من الواضح أنه لا يمكن تحقيق ذلك بمجرد الاشتقاق الفعلى لكل عبارة تحصيل حاصل لأن هذه العملية ستكون عملية لا نهائية .

دعنا أولا نتأمل القضية الأكثر بساطة :

كل عبارة تحصيل ذات صورة وصل عادية مشتقة ويمكن البرهنة على ذلك بالطريقة الآتية :

أولا : تكون العبارة ذات الصورة العادية للوصل عبارة تحصيل حاصل فى حالة واحدة فقط ، وهى عندما تكون كل واحدة من مكونتيها الشرطيتين المنفصلتين عبارة تحصيل حاصل . ثانياً : تكون الشرطية المنفصلة تحصيل حاصل فى حالة واحدة فقط وهى عندما تكون صورتها كالآتى :

س̂ ٧ س ٧ ــ س ٧ ص̂

( ١ ) يمكن استبعاد هذه الفقرة عند القراءة الأولى للكتاب إذا رئيت صعوبة فى تفصيلات البرهان .

وتمثل كل من س̂ ، ص̂ نفسيهما هنا قضية شرطية منفصلة . فهل فى إمكاننا أن نثبت أن كل مثل هذه القضايا الشرطية المنفصلة صيغ مشتقة داخل (ن ب) ؟ من أجل تحقيق ذلك يجب أن نثبت ثلاثة أشياء :

١ — س V ⊃ س صيغة مشتقة بداخل ن ب .

٢ — إذا كانت س̂ صيغة مشتقة فكذلك تكون (س̂ V ص̂) صيغة مشتقة.

٣ — إذا كانت س̂ صيغة مشتقة فكذلك تكون (س̂ V ص̂) صيغة مشتقة.

وفى حالة توافر هذه القضايا الثلاث المفترضة[1] Lemmas « المأخوذات » تتلوبعد ذلك مباشرة أحكام البداهة .

حكم البداهة رقم (١) :

كل الصيغ من نوع (س̂ V س V ⊃ س V ص̂) عبارة عن صيغ مشتقة داخل ن ب .

وتعطينا قاعدة الإضافة (ق ح رقم ٤) حكم البداهة الثانى :

حكم البداهة رقم (٢) :

جميع القضايا الشرطية المتصلة من الصيغ ذات الصورة :

(س̂ V س V ⊃ س V ص̂) (أو بمعنى آخر كل صور العطف العادية) هى صيغ مشتقة داخل ن ب .

---

(١) القضية المفترضة Lemmas هى قضية يمكن الأخذ بها أو البرهنة عليها كقضية أولية بالنسبة إلى البرهان الخاص بأى قضية أخرى . وفى منطق أرسطو القضية المفترضة هى المقدمة الكبرى فى القياس . أما فى الرياضيات فالقضية المفترضة هى حكم البداهة الذى يجرى إثباته لاستخدامه من أجل إثبات حكم بداهة آخر . ويطلق عليها اسم القضية المفترضة بالذات حين تصبح هذه القضية المفروضة بغير أهمية فى حد ذاتها بعد إثبات حكم البداهة الذى جاءت لصالحه . أى أن القضية المفروضة هى حكم بداهة انتهت مهمته بإثبات حكم بداهة آخر انبنى وجوده عليه وتسمى هذه القضايا بالمأخوذات . « المترجم »

وبتوافر هذين الحكمين من أحكام البداهة علينا أن نظهر بعد ذلك آن كل عبارات تحصيل الحاصل هى صيغ مشتقة داخل ن ب . وهذا هو ما نفعله أيضاً عندما نظهر .

حكم البداهة رقم (٣) :

إذا كانت إحدى صور العطف العادية صيغة مشتقة داخل ن ب فكل الصيغ التى تقبل أن ترد إلى هذه الصورة العادية هى إذن كذلك صيغ مشتقة .

وعلينا أن نتذكر أن الرد reduction إلى صورة العطف العادية إنما يتم ويتحقق بواسطة تتابع التطبيقات الخاصة بالعمليات التالية :

(أ) استخدام $\hat{س}$ للتعبير عن ~ ~ $\hat{س}$

(ب) استخدام ~ $\hat{س}$ v ~ $\hat{ص}$ للتعبير عن ~ ($\hat{س}$ . $\hat{ص}$)

(حـ) استخدام ~ $\hat{س}$ . ~ $\hat{ص}$ للتعبير عن ~ ($\hat{س}$ v $\hat{ص}$)

(د) استخدام ~ $\hat{س}$ v $\hat{ص}$ للتعبير عن $\hat{س}$ ⊃ $\hat{ص}$

(هـ) استخدام ($\hat{س}$ v $\hat{ص}$) . ($\hat{ل}$ v $\hat{ص}$) للتعبير عن ($\hat{س}$ . $\hat{ل}$) v $\hat{ص}$

وبالتالى فسوف تكفى البرهنة على :

حكم البداهة رقم (٤) :

إذا كانت الصيغة ($\hat{س}$) صيغة مشتقة داخل (ن ب) فأى صيغة إذن يمكن اشتقاق ($\hat{س}$) منها عن طريق إجراء أى عملية من العمليات الخمس المذكورة عاليه هى أيضاً صيغة مشتقة .

**قانون الاطراد** Regularity :

من أجل تشييد التمام سنحتاج إلى إظهار أن الصيغ الآتية هى صيغ مشتقة:

١ — س V ∽ س

٢ — س ⊂ (ص V س)

٣ — س ⊂ (س V ص)

٤ — س ≡ ∽ ∽ س

٥ — (∽ س̂ V ∽ ص̂) ≡ ∽ (س̂ • ص̂)

٦ — (∽ س̂ • ∽ ص̂) ≡ ∽ (س̂ V ص̂)

٧ — (∽ س̂ V ص̂) ≡ س̂ ⊂ ص̂

٨ — ((س̂ V ص̂) • (ل̂ V ص̂)) ≡ (س̂ • ل̂) V ص̂

غير أننا إذا شئنا استخدام هذه الصيغ من أجل رد الصيغ إلى صور عادية داخل ( ن ب ) فمن الضرورى أن ننشئ أولا بعض الملامح الأكثر عمومية فيما يخص النسق .

فمثلا تتألف إحدى الخطوات فى الرد المعتاد إلى الصورة العادية من إحلال ( س) مثلا محل الموقع الذى تحتله ( ∽ ∽ س ) فى الصيغة المراد ردها . وعلى ذلك إذا كان لدينا صيغة مثل :

٩ — ∽ ∽ س ⊂ (ص ⊂ س)

فستعمد أول خطوة نخطوها إلى عملية الإحلال التى أشرنا إليها بحيث نحصل على :

١٠— س ⊂ (ص ⊂ س)

ونأخذ فى الرد المعتاد بأنه إذا كانت س ≡ ∽ ∽ س هى تحصيل حاصل فبالتالى تكون العبارة « رقم (٩) ≡ رقم (١٠) » هى عبارة تحصيل حاصل . ويحل محل تصور تحصيل الحاصل داخل نسقنا ن ب تصور الصيغة المشتقة . ولذلك فعلينا أن نبرهن أنه :

إذا كانت س ≡ ــ ــ س صيغة مشتقة داخل ن ب

فإذن ( ٩ ) ≡ (١٠) هى أيضاً صيغة مشتقة .

ومن الضرورى بشكل عام أن ننشئ "حكم البداهة التالى بشأن ( ن ب) :

حكم البداهة رقم ( ٥ ) :

لنفرض أنه توجد الصيغة سْ ( هـ̂ ) التى تحتوى على الصيغة (هـ̂ ) ولنفرض أنه قد تم الحصول على سْ (ط̂) من سْ (هـ̂ ) بإحلال (ط̂) محل الموقع الذى تحتله (هـ̂ ) فى سْ (هـ̂ ) . وعلى ذلك فإذا كانت العبارة ( هـ̂ ) ≡ (ط̂) صيغة مشتقة داخل ن ب فإن سْ (هـ̂ ) كذلك هى صيغة مشتقة داخل ن ب .

ومن الواضح أن حكم البداهة رقم (٤) يندرج مباشرة تحت حكم البداهة رقم (٥) وكذلك تحت الاشتقاق فى الصيغ ما بين (٤) ، (٨) السابقة . وذلك لأنه إذا كانت هـ̂ ≡ ط̂ وكانت سْ (ط̂) صيغاً مشتقة داخل ن ب فكذلك ستكون سْ (هـ̂ ) صيغة مشتقة داخل ن ب بناء على حكم البداهة رقم (٥) .

ومن أجل البرهنة على حكم البداهة رقم (٥) نستطيع إنشاء اشتقاقية الصيغ التالية ( وسوف يتضح الأمر هنا فيما بعد ) :

١١- (س ⊂ ص ) ≡ (ــ ص ⊂ ــ س )

١٢- (س ⊂ ص ) ⊂ ((ص ⊂ ل ) ⊂ (س ⊂ ل ))

وهكذا نتقدم الآن إلى اشتقاق الصيغ من ( ١ ) إلى ( ٨ ) ومن (١١) إلى (١٢) .

اشتقاق الصيغ فى ( ن ب ) :

ويجدر بنا هنا أن نورد البديهيات والقواعد الخاصة بنسق البديهيات مرة أخرى .

**البديهيات :**

١ – ( س v س ) ⊃ س

٢ – ص ⊃ ( س v ص )

٣ – ( س v ص ) ⊃ ( ص v س )

٤ – ( ص ⊃ ل ) ⊃ (( س v ص ) ⊃ ( س v ل ))

**القواعد :**

١ – الاستبدال

٢ – النقل بواسطة التعريف

٣ – الاستخلاص

٤ – الإضافة

**التعريفات [1] :**

١ – س̂ • ص̂ = ت ت ~ ( ~ س̂ v ~ ص̂ )

٢ – س̂ ⊃ ص̂ = ت ت ( ~ س̂ v ص̂ )

٣ – س̂ ≡ ص̂ = ت ت ( س̂ ⊃ ص̂ ) • ( ص̂ ⊃ س̂ )

( ف ١ ) ( س ⊃ ~ س ) ⊃ ~ س

( وقد تمت البرهنة على هذه )

---

( ١ ) يشار بالحروف ( تف ) إلى هذه التعريفات الثلاثة وحدها للتخصيص أما ما عداها فهو ( ف ) فقط .

( ف ٢ ) ( س ⊏ ص ) ⊏ (( ل ⊏ س ) ⊏ ( ل ⊏ ص ))

**البرهان :**

( ١ ) — ( ص ⊏ ل ) ⊏ (( س V ص ) ⊏ ( س V ل )) ب ٤

( ٢ ) — ( س ⊏ ص ) ⊏ (( ~ ل V س ) ⊏ ( ~ ل V ص )

(١) ، ( س/ص ، ص/ل ، ~ ل/س ) ،

ق ح رقم ١

( ٣ ) — ( س ⊏ ص ) ⊏ (( ل ⊏ س ) ⊏ ( ل ⊏ ص ))

(٢) ، تف ٢ ، ق ح رقم ٢

وباستغلال طبيعة الاشتقاق فى ( ف ٢ ) نحقق القاعدة المشتقة ( ق م ) التالية :

( ق م ١ ) إذا كان كل من ( $\hat{\text{س}}$ ⊏ $\hat{\text{ص}}$ )

و ( $\hat{\text{ص}}$ ⊏ $\hat{\text{ل}}$ )

قابلين للاشتقاق

فكذلك ( $\hat{\text{س}}$ ⊏ $\hat{\text{ل}}$ )

**البرهان :**

ضع $\hat{\text{ص}}$ ، $\hat{\text{ل}}$ ، $\hat{\text{س}}$

محل س ، ص ، ل على التوالى فى ( ف ٢ )

وطبق ( ق ح ٣ )

* * *

( ف ٣ ) ∼ س V س

البرهان :

١ – ص ⊂ ( س V ص ) (ب ٢ )

٢ – س ⊂ ( س V س ) (١) ، ( ق ح ١ ) ، ( س/ص )

٣ – ( س V س ) ⊂ س ( ب ١ )

٤ – س ⊂ س (٢) ، (٣) ، ( ق ح ٣ )

٥ – ∼ س V س (٤) ، ( ق ح ٢ ) ، ( تف ٢ )

* * *

( ف ٤ ) س V ∼ س

البرهان :

١ – ( س V ص ) ⊂ (ص V س ) ( ب ٣ )

٢ – (∼ س V س) ⊂ (س V س) (١) ، (ق ح١) ، (∼ س/س) ، ( س/ص )

٣ – س V ∼ س (٢) ، ف ٣ ، ق ح ٣

* * *

( ف ٥ ) س ⊂ ∼ ∼ س

**البرهان :**

١ – س V ~ س　　　ف ٤

٢ – ~ س V ~ ~ س　　　(١) ، (ق ح ١) ، (~ س/س)

٣ – س ⊃ ~ ~ س　　　(٢) ، (ق ح ٢) ، تف ٢

• • •

(ف ٦) ~ ~ س ⊃ س

**البرهان :**

١ – س ⊃ ~ ~ س　　　(ف ٥)

٢ – ~ س ⊃ ~ ~ ~ س　　　(١) ، (ق ح ١) ، ( ~ س/س )

٣ – (ص ⊃ ل) ⊃ ((س V ص) ⊃ (س V ل))　　　(ب ٤)

٤ – (~ س ⊃ ~ ~ ~ س) ⊃ ((س V ~ س) ⊃

⊃ (س V ~ ~ ~ س))

(٣) ، ق ح ١ ، ( ~ س/ص ) ،

( ~ ~ ~ س/ل )

٥ – (س V ~ س) ⊃ (س V ~ ~ ~ س)

(٢) ، (٤) ، (ق ح ٣)

٦ – (س V ~ ~ ~ س)　　　(٥) ، (ف ٤) ، (ق ح ٣)

٧ – ـــ ـــ ـــ ـــ س V س (٦) ، (ب ٣) ، (ق ح ١)

(~~~ س/ص) ، (ق ح ٣)

٨ – ـــ ـــ س ⊂ س (٧) ، (تف ٢) ، (ق ح ٢)

* * *

(ف ٧) س ≡ ـــ ـــ س

**البرهان :**

استخدم (ف ٥) ، (ف ٦) ، (ق ح ٤) ، (ق ح ٣) ، (تف ٣)

(القارئ الآن فى وضع يسمح له بإعداد بعض هذه البراهين فيما بينه وبين نفسه بعد حصوله على العناصر المناسبة) .

* * *

(ف ٨) س ⊂ (ص V س)

**البرهان :**

استخدم (ب ٢)

* * *

(ف ٩) (س ⊂ ص) ⊂ (ـــ ص ⊂ ـــ س)

**البرهان :**

١ (ـــ س V ص) ⊂ (ص V ـــ س)

ب ٣ ، ق ح ١ ، (ـــ س/س)

٢ – (س ⊂ ص) ⊂ (ـــ ص ⊂ ـــ س)

(١) ، ق ح ٢ ، تف ٢

* * *

(ف ١٠) ( ∽ ص ⊂ ∽ س ) ⊂ ( س ⊂ ص )

**البرهان :**

مماثل لبرهان (ف ٩)

* * *

(ف ١١) ( س ⊂ ص ) ≡ ( ∽ ص ⊂ ∽ س )

**البرهان :**

(ف ٩) ، (ف ١٠) ، (ق ح ٤) ، (تف ٣)

* * *

(ف ١٢) س ⊂ (س V ص)

**البرهان :**

١ – (ص V س) ⊂ (س V ص) ⊂ [{س ⊂ (ص V س)} ⊂ {س ⊂ (س V ص)}][1]

(ف ٢) ، (ق ح ١) ، (ص V س/س) ،

(س V ص/ص) ، (س/ل)

٢ – [س ⊂ (ص V س)] ⊂ [س ⊂ (س V ص)]

(١) ، (ب ٣) ، (ق ح ٣)

---

(١) عند الطباعة فضلنا أن يتم وضع الأقواس بالترتيب الآتى : القوس الأكبر يأخذ علامة « [ »، والقوس المتوسط يأخذ شكل« { » ، والقوس الأصغر يأخذ شكل « ( » وذلك للإشارة إلى المجالات الأكبر والأوسط والأصغر على التوالى . (المترجم)

٣ — س ⊂ (س V ص)　　　　(٢) ، ف ٨ ، (ق ح ٣)

* * *

(ف ١٣) (س ⊂ ص) ⊂ [(ص ⊂ ل) ⊂ (س ⊂ ل)]

**البرهان :**

نترك هذا البرهان ليكون بمثابة تمرين للقارئ . ومعطياته هى العناصر الآتية .

ابدأ من (ب ٣) وتقدم كالآتى مع إبراز المسوغ الخاص بكل خطوة :

١ — (س ⊂ ~ ص) ⊂ (ص ⊂ ~ س)

٢ — (س ⊂ ~ (ص • ل)) ⊂ (ص ⊂ ~ (س • ل))

٣ — (س ⊂ (ص ⊂ ~ ل)) ⊂ (ص ⊂ (س ⊂ ~ ل))

٤ — [(ص ⊂ ل) ⊂ ((س ⊂ ص) ⊂ (س ⊂ ل))] ⊂

[(س ⊂ ص) ⊂ {(ص ⊂ ل) ⊂ (س ⊂ ل)}]

٥ — [(ص ⊂ ل) ⊂ ((س ⊂ ص) ⊂ (س ⊂ ل))]

٦ — استخدم (٤) ، (٥) ، (ق ح ٣) .

* * *

(ف ١٤) (~ س V ~ ص) ≡ ~ (س • ص)

١ — س ≡ ~ ~ س　　　　(ف ٧)

٢ — (~ س V ~ ص) ≡ ~ ~ (~ س V ~ ص)

(١) ، (ق ح ١) ، (~ س V ص/س)

٣ – (∼ س V ∼ ص) ≡ ∼ (س · ص)
(٢) ، (ق ح ٢) ، (تف ١)

* * *

(ف ١٥) (∼ س · ∼ ص) ≡ ∼ (س · ص)

(ف ١٦) (∼ س V ص) ≡ (س ⊃ ص)

(ف ١٧) ((س V ص) · (س V ل)) ≡ (س V (ص · ل))

وندع البراهين الخاصة بالتعريفات من ف ١٥ إلى ف ١٧ كتمرين يقوم به القارئ . ويوفر لنا تطبيق قاعدة الاستبدال بالنسبة إلى التعريفات (ف ١٤، ف ١٥ ، ف ١٦ ، ف ١٧) هذه العبارة :

(∼ س̂ V ∼ ص̂) ≡ ∼ (س̂ · ص̂) وهكذا . . .

* * *

**برهان قانون الاطراد :**

نحن الآن فى وضع يسمح لنا بالبرهنة على حكم البداهة رقم ٥ الذى يجدر بنا أن نستعيده الآن كالآتى :

لنفرض أنه توجد الصيغة س̂ (ه̂) الذى تحتوى على الصيغة (ه̂) ولنفرض أنه قد تم الحصول على س̂ (ط) من س̂ (ه̂) بإحلال (ط̂) محل الموقع الذى تحتله (ه̂) فى س̂ (ه̂) . وعلى ذلك فإذا كانت العبارة (ه̂) ≡ (ط̂) صيغة مشتقة داخل ن ب فإن س̂ (ه̂) ≡ س̂ (ط̂) هى كذلك صيغة مشتقة داخل ن ب .

البرهان :

القضية المفترضة ( ١ ) :

إذا كانت س̂ ( ه̂ ) إحدى المتغيرات القضوية س ، ص ، ل . . .

فى هذه الحالة تكون ( ه̂ ) و (س̂) ( ه̂ ) نفس الشيء . وبالمثل تكون ط̂ ، س̈ ( ط̂ ) نفس الشيء أيضاً . وعلى ذلك فإذا كانت س̂ ≡ ط̂ صيغة مشتقة فكذلك تكون س̂ ( ه̂ ) ≡ س̂ ( ط̂ ) .

القضية المفترضة ( ٢ )

إذا كان حكم البداهة صادقاً فيما يتعلق ببعض الصيغ س̂ ( ه̂ )

فكذلك يصدق بشأن ( ~ س̂ ( ه̂ ) )

وما دام حكم البداهة صادقاً بشأن س̂ ( ه̂ )

فسيتوفر لدينا أن س̂ ( ه̂ ) ≡ س̂ ( ط̂ ) كصيغ مشتقة . وبالتالى تكون:

س̂ ( ه̂ ) ⊃ س̂ ( ط̂ )

وكذلك س̂ ( ط̂ ) ⊃ س̂ ( ه̂ )

صيغاً مشتقة أيضاً .

وبالاستبدال عن طريق ( ف ١٢ ) نحصل على :

( س ( ه̂ ) ⊂ س̂ ( ط̂ ) ) ≡ ( ∽ س̂ ( ط̂ ) ⊂ ∽ س̂ ( ه̂ ) )
كصيغ مشتقة .

ونحصل بالاستخلاص على :

( ∽ س̂ ( ط̂ ) ⊂ ∽ س̂ ( ه̂ ) كصيغة مشتقة

وبالمثل نحصل على :

( ∽ س̂ ( ه̂ ) ⊂ ∽ س̂ ( ط̂ ) كصيغة مشتقة

وكذلك عن طريق الإضافة نحصل على :

( ∽ س̂ ( ه̂ ) ≡ ∽ س̂ ( ط̂ ) كصيغه مشتقة .

* * *

القضية المفترضة ( ٣ )

إذا كان حكم البداهة صادقاً بالنسبة إلى بعض الصيغ س̂ ( ه̂ ) فإنه يكون صادقاً أيضاً بالنسبة إلى أى صيغة من نوع صورة القضية :

س̂ ( ه̂ ) ⊂ ص̂

وبما أن حكم البداهة يعد صادقاً بالنسبة إلى س̂ ( ه̂ )

فإن س̂ ( ه̂ ) ⊂ س̂ ( ط̂ ) ، س̂ ( ط̂ ) ⊂ س̂ ( ه̂ ) تكونا صيغاً مشتقة .

وبالاستبدال فى ( ف ١٣ ) نحصل على :

(س̂ (ط̂ ) ⊂ س̂ (ه̂ )) ⊂ ((س̂ (ه̂ ) ⊂ ص̂ ⊂ ⊂ (س̂ (ط̂)

⊂ ص̂ ))

وبالاستخلاص نحصل على :

(( س̂ (ه̂ ) ⊂ ص̂ ) ⊂ (س̂ (ط̂ ) ⊂ ص̂ )) كصيغة مشتقة .

وبالمثل، [ إذا استخدمنا س̂ (ه̂ ) ⊂ س̂ (ط̂) ] نحصل على :

(( س̂ (ط̂) ⊂ ص̂ ) ( س̂ (ه̂ ) ⊂ ص̂ )) كصيغة مشتقة .

ومن ثم نحصل بالإضافة على :

(( س̂ (ه̂) ⊂ ص̂ ) ≡ (س̂ (ط̂) ⊂ ص̂ )) كصيغة مشتقة .

* * *

القضية المفترضة ( ٤ ) :

إذا كان حكم البداهة صادقاً بشأن س̂ ( ه̂ )

فهو كذلك صادق بشأن أى صيغة من الصورة المنطقية

(ص̂ ⊂ س̂ (ه̂ ))

وهنا أيضاً س̂ (ه̂) ⊂ س̂ (ط̂) وكذلك

(س̂ (ط̂) ⊂ س̂ (ه̂) تكونان صيغتين مشتقتين .

وبالاستبدال فى ( ف ٢ ) نحصل على :

(سٓ ( طٓ ) ⊐ سٓ ( هٓ )) ⊐ (صٓ ⊐ سٓ ( طٓ )) ⊐ ( صٓ ⊐ سٓ ( هٓ ) ) كصيغة مشتقة .

وبالاستخلاص نحصل على :

( صٓ ⊐ سٓ ( طٓ ) ) ⊐ ( صٓ ⊐ سٓ ( هٓ ) ) كصيغة مشتقة .

وبالمثل ( ( صٓ ⊐ سٓ ( هٓ ) ) ⊐ ( صٓ ⊐ سٓ ( طٓ ) ) كصيغة مشتقة .

ومن ثم تكون :

( صٓ ⊐ سٓ ( هٓ ) ) ≡ ( صٓ ⊐ سٓ ( طٓ ) ) كصيغة مشتقة .

ومن شأن هذه القضايا المفترضة أن تؤسس حكم البداهة الخاص بنا لأن كل صيغنا يمكن بناؤها بواسطة المتغيرات القضوية :

( ∼ ) ، ( ⊐ )

التى نحصل بواسطتها على :

( V ) ، ( · ) ، ( ≡ )

عن طريق التعريف حينما كان ذلك ضروريًّا .

* * *

برهان التمام بالنسبة إلى ( ن ب ) :

يكشف حكم البداهة رقم ( ٥ ) مع ( ف ٧ ) ، ( ف ١٤ — ١٧ ) عن أنه إذا كانت

سٓ ( طٓ )

يتم الحصول عليها عن طريق

س̂ ( ه̂ )

إذا تم أداء أى عملية من العمليات المسلسلة من ( ١ ) إلى ( ه ) فى حكم البداهة ( ٣ ) [١] .

وعلى ذلك فإذا كانت س̂ ( ه̂ ) صيغة مشتقة .

فكذلك س̂ ( ط̂ ) . وعلينا أن نكافئ كلا من ( ه̂ ) ، ( ط̂ ) على التوالى مع الطرفين الأيمن والأيسر فى أى متكافئة أخرى من المتكافئات ( ف ١٤ — ١٧ )

خذ مثلا ما يلى :

ف ٧ ( س ≡ ــ ــ س )

ولنفرض أنه تتوافر لدينا الصيغة س̂ ( ه̂ ) المشتقة التى تحتوى على ( س )

فعلينا أن نبرهن على أن س̂ ( ــ ــ ه̂ ) صيغة مشتقة .

وعن طريق حكم البداهة رقم ( ٥ ) نجد أنه

إذا كانت ( ه̂ ≡ ــ ــ ه̂ ) صيغة مشتقة

فكذلك تكون

س̂ ( ه̂ ) ≡ س̂ ( ــ ــ ه ) صيغة مشتقة

وعلى ذلك يتأسس حكم البداهة ( ٤ )

ومن ثم أيضاً حكم البداهة رقم ( ٣ )

---

( ١ ) هذا مقابل ما هو موجود فى صفحات رقم ١١٨-١١٩ .

أى أنه بعبارة أخرى :

١ – كل الصيغ التى يمكن ردها إلى صيغة من صيغ الشرط المتصل المشتقة ذات الشكل المقبول العادى التى يطلق عليها اسم (ك م ع) هى صيغ اشتقاقية (١) .

٢ – كل عبارات تحصيل الحاصل من الشكل ( ك م ع ) هى صيغ اشتقاقية .

٣ – كل عبارات تحصيل الحاصل يمكن ردها إلى صيغ تحصيل الحاصل من نوع ( ك م ع ) .

وتمنحنا هذه الوقائع الثلاث حكم البداهة الأخير الذى يخصنا وهو : حكم البداهة رقم (٦)

كل عبارات تحصيل الحاصل مشتقة داخل ن ب .

* * *

**٥ – شروط نسق البديهيات :**

ذكرنا من قبل أننا قد نختار البديهيات التى تنشئ نقطة البداية فى نسقنا بطرق كثيرة مختلفة . وبرغم ذلك قد لا يكون اختيارنا إلزامياً تماماً . فهناك اعتبارات معينة بعضها يجرى بحكم القبول وبعضها بحكم القسر والضرورة . وتؤدى هذه الاعتبارات إلى الحد من مجال اختيارنا . فمثلا يكون استخدام عدد كبير لا حاجة إليه من البديهيات أمراً عجيباً لا يناسب الموقف وأحياناً يكون باعثاً على النفور . وقد تصبح براهيننا معقدة بشكل لا حاجة بنا إليه ولا ضرورة تلزمنا به . وقد تصبح صعبة كذلك إذا ألزمنا أنفسنا بحدود عدد قليل جداً منها .

(١) derivable – الفصل السادس – فقرة ٧ .

وأكثر من ذلك أنه يكون فى العادة من المرغوب فيه اختيار البديهيات التى تحيل البراهين الخاصة بأحكام البداهة العامة إلى براهين بسيطة ومباشرة .

ولكن بعض النظر عن هذه المتطلبات الاختيارية لعاملى التوافق والبساطة فما لا غنى عنه فى أى مجموعة من البديهيات أن تستجيب لمطالب هامة أخرى كثيرة . ومن الواضح بداهة مثلا ضرورة أن تكون أى مجموعة نختارها من البديهيات متوافقة متماسكة حتى يستحيل استنباط أى أحكام بداهة متناقضة منها وإن لم يكن من الضرورى ظهور السبب الأصلى . وتوجد من الناحية العملية ثلاثة شروط يلزم اتفاق أى نسق من أنساق البديهيات لها . وقد أشرنا من قبل بإيجاز إلى هذه الشروط [1] . وسبق أن قدمنا برهاناً عن اكتمال نسق البديهيات ( ن ب ) . غير أنه من اللازم الآن مناقشة هذه الشروط فى تفصيل أكبر وإثبات أن ( ن ب ) يستوفى هذه الشروط الثلاثة [2] .

**التوافق** Consistency :

يراعى أولا وقبل كل شىء أن تكون مجموعة بديهياتنا متوافقة متماسكة . ويبدو واضحاً كما نوهنا من قبل أن هذا الشرط لا غنى عنه لأى مجموعة بديهيات . وإذا سألنا مستفسر : « لماذا لا أنتقى وأستخدم مجموعة غير متوافقة من البديهيات ؟ » .

فإننا لن نحصل على إجابة واضحة مقنعة فى آن معاً . فالسبب الذى يلزم من أجله أن تكون مجموعة البديهيات متوافقة متماسكة ما لم تكن كذلك هو إمكان البرهنة على أى قضية كانت داخل النسق .

ومن الممكن توضيح ذلك كالآتى :

---

( ١ ) انظر الفقرة الثانية من هذا الفصل .

( ٢ ) يلاحظ أن البراهين التالية هى من حيث جوهرها براهين هيلبرت وأكرمان ( ١٢ ) وقد حاولنا هنا تفصيلها بشكل ملحوظ حتى تكون صالحة لعرض أولى مبسط .

دعنا نأخذ كمقدمات كبرى لأى برهان قضية ولتكن س̂ ونفيها ~ س̂

١ – س̂ .

٢ – ~ س̂ .

فما دام قد ثبت صدق س̂ فالشرطية المنفصلة التى تترتب على س̂ من أى قضية أخرى ص̂ ستكون أيضاً صادقة . أعنى إذا كانت س̂ صادقة فأى قضية شرطية منفصلة من س̂ ومن أى قضية أخرى ولتكن ص̂ ستكون أيضاً صادقة . وعلى ذلك نستنبط القضية :

٣ – س̂ V ص̂     من (١)

ولكن س̂ V ص̂ مكافئة بالتعريف للقضية ~ س̂ V ص̂

وعلى ذلك تتوافر لدينا القضية :

٤ – ~ س̂ ⊃ ص̂     من (٣) بالتعريف

وكذلك إذا أخذنا (٢) مع (٤) وطبقنا قاعدة الاستخلاص نحصل على ما يلى :

٥ – ص̂     من (٢) ، (٤)

وبذلك فالقضيتان المتناقضتان س̂ ، ~ س̂ إذا أخذتا معاً كانتا كافيتين للبرهنة على أى قضية أخرى كانت لأن هذه هى ما كنا قد افترضنا أن ص̂ تمثلها . ونستطيع الآن أن نرى أن السبب فى الاعتراض على عدم التوافق فى

أى مجموعة بليهيات هو أنها تعمد إلى إلغاء التمييز بين الصيغ السليمة وبين القضايا المترتبة على ما قبلها المعروفة باسم القضايا ذات التكوين الصحيح ( ق ت ص ) وذلك يجعل أى قضية ذات تكوين صحيح ( ق ت ص ) قضية مشتقة داخل النسق . ويؤدى هذا إلى جعل النسق غير ذى نفع وغير ذى أهمية .

ولكن كيف نتأكد من أن إحدى المجموعات المعينة من البديهيات متوافقة أم غير متوافقة ؟

من الواضح أن استنباط أحكام البداهة من البديهيات سيكون غير عملى إلا إذا أدركنا حكم بداهة يناقض صيغة من الصيغ التى سبق تأسيسها بوصفها صيغة سليمة ، ذلك أننا لا نستطيع أن نتأكد إطلاقاً مهما واصلنا استدلالاتنا ما إذا كان التناقض لا يزال بسبيل الظهور أو أن البديهيات متوافقة فى نهاية الأمر .

ولحسن الحظ يوجد منهج أكثر عملية لتقرير ما إذا كانت البديهيات متوافقة أم لا . ونقوم بذلك اعتماداً على إجراء معادل لمنهج جدول الصدق الذى نقرر عن طريقه ما إذا كانت بعض القضايا ذات التكوين الصحيح (ق ت ص) الخاصة بحساب القضايا هى عبارات تحصيل حاصل أم لا . وفى العادة نقيم ما يسمى بالنموذج المحدود على النحو التالى : نضع المتغيرات القضوية س ، ص ، ل ... كأنها تحتل إحدى القيم العددية كما اعتدنا من قبل . ولكن لا حاجة بنا على أى حال إلى أن نفسر هذه القيم كما فعلنا من قبل عندما نظرنا إلى « ١ » بوصفها علامة تمثل الصدق وإلى « ٥ » بوصفها علامة تمثل الكذب . بل نكتفى بالنظر إلى كل متغيرة على أنها واحدة ( وواحدة فقط ) من القيمتين ١ ، ٢ فى أى مناسبة خاصة من المناسبات التى تجرى فيها .

ودعنا نذهب أبعد من ذلك إلى تعريف « ـــ ١ » بأنها « ٢ » وتعريف « ـــ ٢ » بأنها « ١ » كالآتى :

(أ)

| | ـــ |
|---|---|
| ١ | ٢ |
| ٢ | ١ |

ونقوم ثانياً بتعريف قيم القضايا المركبة المترابطه بواسطة الثابتة « V » ناظرين إليها كعامل يقارب علامة الضرب من حيث وضعها الشكلى فى الحساب بحيث نستطيع بناء جدول ضرب خاص بها كالآتى :

(ب)

١ V ١ = ١

١ V ٢ = ٢

٢ V ١ = ٢

٢ V ٢ = ٢

ولعله أكثر دقة وملاءمة أن نكتبها كالآتى :

| V | ١ | ٢ |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ٢ |
| ٢ | ٢ | ٢ |

وإذا استخدمنا الجداول (ا) ، (ب) أمكننا تقويم أى قضية من (ق ت) وتحديدها بإحدى القيمتين (١) أو (٢) داخل كل مجموعة من القيم الخاصة بالمتغيرات القضوية . مثال ذلك :

| س | ص | ∼ س V ص |
|---|---|---|
| ١ | ١ | ٢ V ١ = ٢ |
| ١ | ٢ | ٢ V ٢ = ٢ |
| ٢ | ١ | ١ V ١ = ١ |
| ٢ | ٢ | ١ V ٢ = ٢ |

وعلى ذلك فإن (∼ س V ص) تكون قيمتها (٢) فى ثلاث حالات من أربع حالات ممكنة وتكون قيمتها (١) فى الحالة الواحدة المتبقية حيث س = ٢ ، ص = ١ .

والآن فلنقم بهذه الوسيلة بتقويم البديهيات التى انتقيناها فيما سبق . فسوف يكون من الضرورى أولا وقبل كل شىء أن نضعها فى حدود أو عبارات تتضمن كلا من (∼) ، (V) كالآتى :

(ب ١) (س V س) ⊂ س .

وتصبح ∼ (س V س) V س

(ب ٢) ص ⊂ (س V ص)

وتصبح ∼ ص V (س V ص)

(ب ٣) (س V ص) ⊂ (ص V س)

وتصبح ∼ (س V ص) V (ص V س)

(ب ٤) (ص ⊂ ل) ⊂ ((س V ص) ⊂ (س V ل))

وتصبح ∼ (∼ص V ل) V (∼ س V ص) V (س V ل))

والآن نقومها وفقاً لجداول (ا) ، (ب) السابقة كالآتى :

(ب ١)

| ∼ | (س | V | س) | V | س |
|---|---|---|---|---|---|
| ٢ | ١ | ١ | ١ | ٢ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ |

(ب ٢)

| ∼ | ص | V | (س | V | ص) |
|---|---|---|---|---|---|
| ٢ | ١ | ٢ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ |
| ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ |

(ب ٣)

| ∼ | (س | V | ص) | V | (ص | V | س) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢ | ١ | ١ | ١ | ٢ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ |

ب ٤) ∼ ( ∼ ص V ل ) V (∼ (س V ص ) V ( س V ل ))

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ | ٢ | ١ | ١ | ١ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ | ٢ | ١ |
| ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ | ١ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ |
| ١ | ١ | ١ | ١ | ٢ | ٢ | ١ | ١ | ٢ | ١ | ١ | ٢ | ١ | ٢ |
| ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ | ٢ | ١ | ٢ | ١ |
| ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ١ | ١ | ٢ | ١ | ٢ |
| ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ١ |

وسوف يتضح أن كل بديهية تأخذ القيمة ( ⊨ ) فقط . والآن إذا أوضحنا أن هذه الخاصية تبقى على حالها عندما تتعرض البديهيات لقواعد التحويل النسقية فالنتيجة هى أن كل أحكام البداهة التى يمكن استنباطها من البديهيات تتخذ بالمثل القيمة ( ⊨ ) فقط . وإذا كان ذلك كذلك فإن أى حكمين متناقضين من أحكام البداهة لن يمكن البرهنة عليهما داخل النسق . وذلك لأن أى حكمين متناقضين من أحكام البداهة . . إذا اتخذ أحدهما القيمة ( ⊨ ) فلابد أن يتخذ الثانى القيمة (١) طالما كانت ( ∼ ٢ = ١ ) . وعلينا أن نوضح أن الخاصية التى تتميز بها البديهيات فى أنها تتخذ القيمة ( ⊨ ) فقط لا تتغير بتطبيق قواعد التحويل النسقية .

ومن السهل أن نظهر أن قاعدة التحويل بالاستبدال (ق ح ١ ) وقاعدة التحويل بالنقل ( ق ح ٢ ) لا تؤثران على هذه الخاصية . ففى حالة ( ق ح ٢ ) وهى قاعدة النقل بالتعريف تكون النتيجة واضحة . وبما أن ( $\hat{س}$ ⊨ $\hat{ص}$ ) مثلا يتم تعريفها كمكافئة لعبارة ( ∼ $\hat{س}$ V $\hat{ص}$ ) فإن استبدال ($\hat{س}$ . $\hat{ص}$ )

بالعبارة ( ∼ س̂ ∨ ص̂ ) لا يمكن أن يؤثر على أى قيمة من القيم المقدرة فى أى تعبير معين . والحالة مماثلة بالنسبة إلى المتكافئات الأخرى المحددة . ومن الصعب ألا يكون واضحاً أن أى تعبير ناشئ عن تطبيق ( ق ح ١ ) على أى بديهية من البديهيات لا يستطيع أن يتخذ قيمة أخرى عدا ( ⊃ ) . ذلك أن المنهج الذى قومنا به البديهيات وأكدنا أنها تتخذ القيمة الثابتة ٢ عن طريقه يضمن أننا حسبنا حساب كل التأليفات الممكنة من القيم الخاصة بالمتغيرات القضوية الفردية . ويمكن أن ينتج استبدال متوافق لقضية ذات تكوين صحيح (ق ت ص) خاصة بمتغيرة قضوية معينة خلال إحدى البديهيات بما يتفق مع ( ق ح ١ ) ضمن بديهية تحمل القيمة (١) على شرط واحد . وهذا الشرط هو أن مثل هذا الاستبدال يمكن أن يزيد عدد التأليفات أو المجموعات الخاصة بالقيم (١) ، (٢) المتضمنة فى تقويم التعبير . وهذا مستحيل ما دام المنهج الذى استخدمناه يحسب حساب كل التأليفات الممكنة .

ويمكننا أن نرى أيضاً أن تطبيق قاعدة الاستخلاص ( ق ح ٣ ) على أى صيغتين سليمتين لا يمكن أن ينتج عن تأسيس صيغة قيمتها (١) بالنسبة إلى أى تأليفات من المتغيرات القضوية المكونة لها . وذلك لأن أى صيغ يتم استنباطها استنباطاً سليما من البديهيات بتطبيق ( ق ح ٢ ) ستكون قيمتها كما رأينا (٢ ) فقط . وإذا استنبطنا ( ص̂ ) كقضية تالية مترتبة عل تأسيس الصيغتين ( س̂ ) ، ( س̂ ⊃ ص̂ ) فقد نناقش الأمر كالآتى من أجل إظهار أن ( ص̂ ) لا بد أن تتخذ القيمة ( ٢ ) دون سواها . فكلا من ( س̂ ) ، (س̂ ⊃ ص̂ ) إذا تأسستا كصيغ سليمة كانت لهما قيمة واحدة فقط هى (٢ ) . فإذا كانت

س̂ = ٢

كانت ∼ س̂ = ١

وعلى ذلك فإذا كانت

س̂ ⊂ ص̂

مكافئة لعبارة ∼ س̂ V ص̂

وكانت ∼ س̂ V ص̂ تتخذ القيمة (٢)

وكانت ∼ س̂ تتخذ القيمة (١)

فلا بد أن تكون قيمة ص̌ هى (٢)

( وإذا لم تتخذ ص̂ القيمة (٢) يكون

١ V ١ = ٢

وهو عكس ما تقرر فى تعريفاتنا )

وفى آخر الأمر يمكننا أن نظهر أن قاعدة الإضافة ( ق ح ٤ ) إذا جرى تطبيقها على أى صيغتين سليمتين فإنها لا يمكن أن تنتج عن عملية وصل الصيغتين حاملة القيمة (١) . أو بعبارة أخرى علينا أن نظهر أنه إذا كانت كل من (س̂ ، ص̂) تتخذ القيمة (٢) فلابد أن تتخذ ( س̂ . ص̂ ) كذلك القيمة (٢) . ومن المعروف أن (س̂ . ص̂) تكافئ العبارة :

∼ ( ∼ س̂ V ∼ ص̂ )

وبالتالى فإن ( ٢ ، ٢ ) تكافئ العبارة :

∼ ( ∼ ٢ V ∼ ٢ )

وهذه بدورها تكافئ ∼ (١ V ١ ) أى ( ∼ ١ ) وهو نفس الشيء (٢) وعلى ذلك لا يمكن أن ينتج أى تطبيق لقواعد التحويل الخاصة بالنسق

على البديهيات الأربع أو على أى عبارات يمكن استنباطها منها ... لا يمكن أن ينتج مثل ذلك فى أحد التعبيرات التى تتخذ القيمة ( ـ ٢ ) أو (١) فقط . وبالتالى فالبديهية تتسم بالتوافق .

**الاستقلال** Independence :

تكون مجموعة البديهيات مستقلة إذا لم تتيسر البرهنة على أى واحدة من بين هذه المجموعة كحكم من أحكام البداهة اعتماداً على بعض البديهيات الأخرى أو عليها كلها داخل المجموعة . وليس عيباً جذرياً من وجهة نظر المنطق فى نسق البديهيات إذا لم تكن البرهنة على استقلال البديهيات ميسورة . وبرغم ذلك فهو عيب من وجهة نظر الحرص على التوافق الشكلى والاقتصاد إذا تم استخدام أحد التعبيرات ــ مما يمكن استنباطه فى الواقع كأخذ أحكام البداهة استخداماً يشير إلى أنه نقطة ابتداء غير مبرهنة . ولهذا السبب يحاول المناطقة دائماً تأمين استقلال البديهيات التى يختارونها كنقطة ابتداء لهم بهذا المعنى .

ولكن كيف يمكننا تأكيد ما إذا كانت هذه البديهيات مستقلة فى الحقيقة أم لا ؟ من الواضح أنه ليس عملياً فى شىء أن نبرهن على استقلال ( ب ٤ ) مثلا عن (ب ١ ــ ٣ ) بمحاولة البرهنة على ( ب ٤ ) من ( ب ١ ــ ٣ ) مستدلين بفشلنا كبرهان على الاستقلال . وقد لاحظنا من قبل عند معالجة موضوع التوافق أنه لا يمكننا إطلاقاً أن نتأكد مهما داومنا استخدام مثل هذا المنهج أن (ب ٤ ) صحيحة أو أن البرهنة على صحتها ممكنة : وأكثر من هذا أن منهج بناء النماذج والأنماط المحدودة يوفر لنا أداة مباشرة لاكتشاف ما إذا كانت البديهيات التى نختارها كنقط للابتداء فى نسقنا مستقلة بعضها إزاء البعض الآخر. فنحن نتقدم كما فعلنا من قبل بواسطة إعطاء قيم عددية إلى المتغيرات القضوية التى تشتمل على البديهيات بحيث تستنفد كل التأليفات الممكنة من الأرقام التى

تعزى وتعطى إلى المتغيرات . وفى مقدورنا بناء جداول تظهر أثر العوامل ( ~ ) ، (V) على القيم المنسوبة إلى المتغيرات ،

دعنا أولا نبرهن على استقلال ( ب ١ ) بالنسبة إلى (ب ٢ ) ، ( ب٣ )، ( ب ٤ ) . فنقيم « مصادرة » مؤداها أن المتغيرات القضوية قد تأخذ واحدة من القيم التالية : O ، ١ ، ٢ . وستؤخذ أو ستفهم المفاعلات ( ~ ) ، ( V ) على النحو التالى[١] ،

(آ)

| | ~ |
|---|---|
| O | ١ |
| ١ | O |
| ٢ | ٢ |

(ب)

| V | O | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| O | O | O | O |
| ١ | O | ١ | ٢ |
| ٢ | O | ٢ | O |

وعلى ذلك فمثلا ~ ١ = O

وكذلك ~ ٢ = ٢

وكذلك ٢ V O = O

وكذلك ٢ V ١ = ٢

وهكذا .

ونستطيع الآن تقويم البديهيات من ( ب ١ ) إلى ( ب ٤ ) كالآتى بعد

---

(١) يلاحظ أننا نستخدم الصفر بشكله الإفرنجى تسهيلا للقراءة والعمل به .

تقريرها وسردها أولا على نحو ما جرى فى برهان التوافق بنفس حدود الثوابت ( ~ ) ، ( V ) .

( ب ١ )

| ~ | (س | V | س) | V | س |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | O | O | O | O | O |
| O | ١ | ١ | ١ | O | ١ |
| ١ | ٢ | O | ٢ | ٢ | ٢ |

( ب ٢ )

| ~ | ص | V | (س | V | ص) |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | O | O | O | O | O |
| O | ١ | O | O | O | ١ |
| ٢ | ٢ | O | O | O | ٢ |
| ١ | O | O | ١ | O | O |
| O | ١ | O | ١ | ١ | ١ |
| ٢ | ٢ | O | ٢ | ٢ | ٢ |
| ١ | O | O | ٢ | O | O |
| O | ١ | O | ٢ | ٢ | ١ |
| ٢ | ٢ | O | ٢ | O | ٢ |

(ب ٣)

| س ) | V | ( ص | V | ص ) | V | ( س | ~ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ |
| ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ١ |
| ٠ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ | ١ |
| ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ١ |
| ١ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ١ | ٠ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٢ | ٢ | ١ | ٢ |
| ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ | ١ |
| ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ |
| ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ١ |

( ب ٤ )

| ـــ | ( ـــ | ص | V | ل ) | V | ( ـــ | (س | V | ص) | V | (س | V | ل ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ |
| ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ٢ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٢ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ | ٢ |
| ١ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ٢ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ٠ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ | ١ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٢ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ١ | ٢ | ٢ |
| ١ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ١ | ٠ | ١ | ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٠ | ٠ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ |
| ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ٢ | ٠ | ١ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ٢ | ١ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٠ | ٢ | ٢ | ٢ | ٢ | ١ |
| ١ | ٢ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ١ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ |

وسيتضح بالموازنة بين هذه الجداول أن ( ب ٢ ) ، ( ب ٣ ) ، ( ب ٤ ) تأخذ القيمة (O) فقط فى حين تأخذ ( ب ١ ) إلى جانب القيمة السابقة القيمة (٢) أيضاً ( وتأخذ فى حالة أن تكون س = ٢ ) وقد ظهر فيما سبق فى برهان التوافق أن تطبيق قواعد التحويل على البديهيات لا يمكن أن ينتج فى الصيغ السليمة المستنبطة على هذا النحو بقيمها الجديدة . وعلى ذلك فلا يمكن أن تعطى الاستنباطات من ( ب ٢ ) إلى ( ب ٤ ) أى تعبير يأخذ إحدى القيم الأخرى غير القيمة (O) . وبالأخص لا يمكن استنباط ( ب ١ ) على هذا النحو . وبذلك يصبح استقلال ( ب ١ ) من ( ب ٢ ) ، ( ب ٣ ) ، ( ب ٤ ) مبرهناً عليه .

وبمثل هذه المناهج وما يشابهها يمكن إقامة استقلال البديهيات الأخرى ولكن لن يكون من الضرورى إبراز التفصيلات الخاصة بالتقويمات . ( وعلى القارئ أن يقوم بها بنفسه للمران ) وقد نبرهن على استقلال ( ب ٢ ) عن طريق تقويم البديهيات وفقاً للجداول الآتية :

( جـ )

| | ــ |
|---|---|
| O | ٢ |
| ١ | ١ |
| ٢ | O |

( د )

| V | O | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| O | O | O | O |
| ١ | O | ١ | ٢ |
| ٢ | O | ٢ | ٢ |

ويعطينا تقييم البديهيات فيما يتفق مع هذه الجداول النتائج الآتية :

(ب ١) ، (ب ٣) ، (ب ٤) تصبح إما صحيحة أو غير صحيحة فتأخذ التقييم الجدولى (٠) أو (١) . ولكن (ب ٢) تأخذ القيمة (٢) بالإضافة إلى ما تقدم من التقييم « ( ذلك أن س = ٢ ، ص = ١ ) . وعلى ذلك فإن (ب ٢) مستقلة فى الواقع عن البديهيات الثلاث الأخرى .

ويمكن توضيح استقلال (ب ٣) بواسطة تقييم البديهيات بما يتفق مع الجداول الآتية :

(لَ)

| | ∼ |
|---|---|
| ٠ | ١ |
| ١ | ٠ |
| ٢ | ٠ |
| ٣ | ٢ |

(مَ)

| V | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ٢ | ٠ | ٢ | ٢ | ٠ |
| ٣ | ٠ | ٣ | ٣ | ٣ |

ويقدم لنا هذا النموذج القيمة (٠) وجدها بالنسبة إلى (ب ١) ، (ب٢) (ب ٤) ولكن (ب ٣) تأخذ كذلك القيمة (٣) أيضاً فى الحالة التى تكون فيها س = ٢ وتكون فيها ص = ٣ . ذلك أننا نملك ههنا ما يلى :

( ∼ (٢ V ٣) V (٣ V ٢)) = ( ∼ ٠ V ٣) = (١ V ٣) = ٣ .

ومن الضرورى هنا مراعاة أن المتغيرات القضوية كما هو موضح فى هذا النموذج تستطيع أن تأخذ أى قيمة من القيم الأربع ٥ – ١ – ٢ – ٣ فضلا عن أن جداول التقويم هى نسبياً أكثر تعقيداً فى الواقع . ونحن بحاجة إلى أربعة أسطر بالنسبة إلى ( ب ١ ) وستة عشر ( أو ٤^٢ ) سطراً بالنسبة إلى (ب ٢ ) ، ( ب ٣ ) وأربعة وستين ( ٤^٣ ) سطراً بالنسبة ( ب ٤ ) التى تشتمل على ثلاثة متغيرات قضوية س ، ص ، ل .

وفى النهاية يمكن إبراز استقلال ( ب ٤° ) بواسطة نموذج مبنى على النحو التالى :

( ن َ )

| | ∼ |
|---|---|
| ٥ | ٢ |
| ١ | ١ |
| ٢ | ٥ |

( هـ َ )

| V | ٥ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ٥ | ٥ | ٥ | ٥ |
| ١ | ٥ | ٥ | ٥ |
| ٢ | ٥ | ٥ | ٢ |

وفى هذا النموذج يمكن أن نأخذ كل من ( ب ١ ) ، ( ب ٢ ) ، ( ب ٣ ) قيمة واحدة فقط هى ( ٥ ) فى حين تأخذ ( ب ٤ ) القيمة (٢) إذا كان س = ل = ٢ وكان ص = ١ .

وعلى ذلك نجد لدينا :

∼ ( ∼ ١ V ٢ ) V ( ∼ ( ٢ V ١ ) V ( ٢ V ٢ )

= ∽ ( ١ V ٢ ) V ( ∽ O V ٢ ) = ∽ O V ( ٢ V ٢ )

= ∽ O V ٢ = ٢ V ٢ = ٢

**التمام** Completeness :

يمكن شرح التمام فيما يتعلق بمجموعة من البديهيات بطريقتين :

أولا : تكون مجموعة البديهيات كاملة إذا قامت بتكوين أساس كاف للبرهنة على كل عبارات تحصيل الحاصل الخاصة بالنسق . وسبقت البرهنة على أن ( ن ب ) تام بهذا المعنى .

ثانياً : يكون المعنى الثانى ( والأقوى ) فيما يتعلق بالتمام هو كالآتى : تكون مجموعة البديهيات تامة إذا أدت إضافة بديهية مستقلة أخرى إليها إلى عدم التوافق بداخل هذه المجموعة .

ويمكننا أن نبرهن على أن ( ن ب ) تام بالمعنى الثانى أيضاً على النحو التالى . نفرض أن ( س$^{٨}$ ) هى أى ( ص س ) لا يمكن البرهنة عليها من البديهيات . فسيترتب على ذلك حصول هذه العبارة ( س$^{٨}$ ) على شكل مقبول عادى ( ك م ع ) خاص بالوصل يمكن أن نسميه ( ص$^{٨}$ ) . وستكون (ص$^{٨}$) إحدى الصيغ ذات الشكل :

ل$_{١}$ . ل$_{٢}$ . ل$_{٣}$ ...... ل$_{ن}$

حيث تكون مجموعة « اللامات » ( حرف اللام ) شرطيات منفصلة خاصة بالمتغيرات القضوية المنفية والمثبتة . ولكن لما كانت (س$^{٨}$) وكذلك (ص$^{٨}$) بالتالى لا يمكن البرهنة عليها من البديهيات فلا بد أن تحتوى ( ل ) واحدة على الأقل من بين هذه اللامات على مكونات غير متناقضة فيما بين بعضها وبعض .

ولنطلق على هذه العبارة الخاصة بالفصل هذه العلامة « ل كاف » . وبإمكاننا

القيام بعملية استبدال توافق إزاء ( ل كاف ) وفقاً للقاعدة ( ق ح ١ ) . فنستبدل كل متغير قضوى غير منفى بالعلامة « س » ونضع ( ن س ) محل كل متغير قضوى فى حالة نفى . فمثلا إذا كانت ل كاف هى :

( س V ∼ ص V ل V ∼ م )

ويتطبيق الاستبدالات نحصل على الآتى :

( س V ∼ ∼ س V س V ∼ ∼ ∼ س )

وهذه تكافئ بدورها

( س V س V س V س )

وهذه أيضاً تكافئ ( س )

ولكن إذا كان مفترضاً أن (س^) صيغة سليمة فستكون (ص^) إذن وبالتالى ( ل كاف ) صيغاً سليمة . وما دام من الممكن كتابة ( ل كاف ) كما لو كانت ( س ) عن طريق استبدال التوافق ، فستكون (س) إذن صيغة سليمة . ولا يمكن أن يكون ذلك هو الوضع لأنه سيكون من الممكن عن طريق استبدال توافق آخر مسموح به يالمثل ومتفق تماماً مع ( ق ح ١ ) .. سيكون من الممكن بذلك كتابة ( ∼ س ) فيما يتعلق بكل متغير قضوى غير منفى فى ( ل كاف ) وكتابة (س) فيما يتعلق بكل متغير منفى بحيث نحصل على :

( ∼ س V ∼ س V ∼ س V ∼ س )

التى تكافئ ( ∼ س ) . وعلى ذلك فافتراض أن ( س^ ) لا يمكن البرهنة عليها اعتماداً على البديهيات وأنها برغم ذلك صيغة سليمة . . . هذا الافتراض يسوق إلى النتيجة أن كلا من (س) ، ( ∼ س ) صيغ سليمة . وهذا تناقض. وعلى هذا فالبديهيات من ( ب ١ ) إلى ( ب ٤ ) تامة بمعنى أنه إذا أضيفت إليها أى بديهية مستقلة نشأ عن ذلك تناقض .

« وعلى القارئ أن يتحقق بنفسه من أنه يمكن إجراء زوج مماثل من الاستبدالات

على إحدى بديهيات (ن ب ) ـِ أو على أى حكم من أحكام البداهة التى تترتب على البديهيات ــ بما يتفق مع (ق ح ١ ـ) ؛ .

مراجع الفصل الرابع :

يمكن العثور على تقرير أولى واضح عن تطور منهج البديهيات الخاص بحساب القضايا فى كتاب أمبروز ولازيروفيتس ( ١ ) ولكن بدون ذكر لبراهين التوافق والتمام والاستقلال . توجد معالجة أولية ممتازة من وجهة نظر أكثر تعميماً فى كتاب تارسكى ( ٣١ ) . ويمكن الوقوف على تناول تقليدى للموضوع أيضاً فى كتاب هيلبرت وأكرمان (١٢) . ويقدم إيتون ( ١٠ ) تقديماً بسيطاً إلى منهج البديهيات كما عرضه كتاب رسل وهوايتهد عن مبادئ الرياضيات المعروف باسم برنكيبيا ماتيماتيكا (٣٣) .

## الفصل الخامس

# عناصر حساب المحمول[1]

### ١ ـ بعض صور جديدة للاستدلال :

هناك عدد كبير من صور الاستدلال التى تعد تامة البساطة وواضحة السلامة المنطقية ، غير أن سلامتها لا يمكن أن تنبنى على مناهج تحليل صدق الدوال التى سبق أن عالجناها فى الفصلين الثانى والثالث . وهاك أمثلة على ذلك :

١ ـ يدفع جميع الأعضاء العاديين فى الجمعية اشتراكاً سنوياً قدره جنيه واحد ، وكل من يدفع اشتراكاً سنوياً قدره جنيه واحد يتسلم مطبوعات الجمعية بدون أى التزامات مالية جديدة . إذن فكل الأعضاء العاديين فى الجمعية يتسلمون مطبوعات الجمعية بدون التزامات مالية جديدة .

٢ ـ كل رجال الإرساليات الدينية أصحاب نظرات صارمة فى الأخلاق ، ولا تتوافر فى أحد أصحاب النظرات الصارمة فى الأخلاق صفات الباحث الجيد فى علوم الإنسان . إذن مستحيل أن يصبح أحد رجال الإرساليات الدينية باحثاً جيداً فى علوم الإنسان .

٣ ـ من حق كل طلاب الجامعة استخدام مكتبة الجامعة ، وليس بعض الطلاب من الراغبين فى المنح المالية . إذن فبعض من لهم الحق فى استخدام مكتبة الجامعة ليسوا راغبين فى المنح المالية .

---

(١) ننصح بقراءة فصل كم المحمول فى كتاب الدكتور عبد الرحمن بدوى (ص ٢٢٦) المنطق الصورى والرياضى ، قبل قراءة هذا الفصل . (المترجم) .

ويلاحظ أن سلامة هذه الاستدلالات من الناحية المنطقية تتوقف فيما يبدو بشكل من الأشكال على استعمالات الألفاظ « كل » ، « بعض » ، « لا أحد » والتعبيرات المعادلة لها ، كما تتوقف على الطريقة التى تستخدم بها بعض العبارات الوصفية المعينة ( مثل « عضو عادى » ومثل « يدفع اشتراكاً سنوياً قدره جنيه واحد » وما شابه ذلك ) فى ربط المقدمات بالنتيجة . ومن الواضح أن الحجج التى من هذا النوع لا تكون صحيحة أو سليمة منطقياً إلا إذا كان ربط المقدمات بالنتيجة مستوفياً بعض الاشتراطات . ولابد أن يكون هدفنا إذن تعيين هذه الاشتراطات تعييناً صحيحاً . ونأمل بذلك الحصول على إجراء عملى آلى من أجل اختبار مثل هذه الحجج . وسوف يكون ذلك مفيداً فى الحجج الأشد تعقيداً التى لا يكون فيها الحدس البديهى دليلا مبرأً من الخطأ . وسيكون هذا الإجراء العملى الآلى بطبيعة الحال بمثابة منهج القرار القاطع المماثل لمنهج جداول الصدق أو الصيغ العادية التى تكلمنا عنها فى الفقرة السابعة من الفصل الثالث .

وقد يكون مفيداً هنا أن نعيد الإشارة إلى المثلين اللذين ناقشناهما فى بداية الفصل الثانى من أجل إبراز الطابع الأساسى للحجج التى سنضعها الآن موضع الاهتمام .

٤ — كل المهن الخطرة تتكلف مرتبات باهظة .

العمل فى المناجم مهنة خطرة .

إذن فالعمل فى المناجم يتكلف مرتبات باهظة .

٥ — إذا كان العمل فى المناجم مهنة خطرة كانت مرتباته باهظة .

والعمل فى المناجم مهنة خطرة .

إذن فلابد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة .

وقد رأينا أن مضمون هاتين الحجتين هو نفس الشىء وأن نتيجتيهما

متكافئتان . وبرغم ذلك فهما مختلفتان اختلافاً أساسيًّا من حيث الطابع المميز لكل منهما من وجهة النظر المنطقية . فى إمكاننا فى الحالة رقم ( ٥ ) أن نتجاهل بناء القضايا الآتية .

« العمل فى المناجم مهنة خطرة »

و « لابد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة »

وأن نعمد إلى اختبار سلامة الهيكل المنطقى المقابل لها .

٦ — ( (س ⊂ ص) . س ) ⊂ ص

ولكننا لا نستطيع أن نفعل نفس الشىء فى الحالة رقم ( ٤ ) . فسيكون البناء المنطقى للبرهان أو للحجة ، إذا انتبهنا إلى القضايا المتضمنة وحدها لا إلى الحدود الوصفية التى تتألف منها القضايا ، كالآتى :

٧ — (س . ص) ⊂ ل

وهذه ليست بالصيغة السليمة كما هو واضح . أو بعبارة أخرى لا تكون الحجة المنطقية من هذا الشكل صحيحة أو سليمة لمجرد كونها بهذه الصورة . إذ أنه من الواضح أن إخفاقنا فى تقدير البناء الداخلى للقضايا من النوع رقم (٤) أى :

« كل المهن الخطرة ذات مرتبات باهظة »

وما إلى ذلك ، قد أدى إلى فقداننا وجهة النظر المنطقية الأساسية الخاصة بالحجة المنطقية . إذن لو كان علينا تقديم حساب عن سلامة الحجج المنطقية من نوع :

كل أ هى ب

وكل س هى أ

إذن س هى ب

لكان من الضرورى أن ننظر فى بناء تلك القضايا التى اتخذناها سلفاً على أنها وحدات بغير تحليل .

**٢ — القضايا المفردة :**

فإذا كان علينا استيفاء برنامجنا وجب علينا الآن النظر فى أمر تحليل القضايا إلى عناصر ليست هى نفسها قضايا . وفى هذا تعارض ملفت للنظر مع إجرائنا السابق الذى اعتبرت فيه القضايا إما كقضايا مركبة من قضايا أخرى أو كعناصر لا تقبل النقصان . ونبدأ بأبسط أنواع القضايا وهى القضايا المفردة . وقد تعرف القضية المفردة سلباً بأنها القضية التى لا تحتوى على روابط دوال الصدق ( أو الثوابت المنطقية ) والتى لا يوجد فيها أيضاً ألفاظ مثل « كل » ، « لا واحد » ، « بعض » ومعادلاتها . وهاك بعض أمثلة من القضايا المفردة :

١ — حسن شجاع

٢ — حسن أكبر سناً من محمد

٣ — الإسماعيلية بين السويس وبور سعيد

ومن الواضح أن نتيجة تحليل هذه القضايا لن تكون قضايا أخرى وإنما هى شىء آخر سنطلق عليه عامة اسم الحدود . مثال ذلك القضية رقم (١) تحتوى على حدين هما « حسن » ، « شجاع » ، وفى المثل رقم (٢) ثلاثة حدود هى « حسن » ، « محمد » : « أكبر سنا من » . وفى المثل رقم ( ٣ ) أربعة حدود هى « الإسماعيلية » ، « السويس » ، « بور سعيد » ، « بين » . ويمكننا أن نتخيل قضايا تحتوى على أكثر من أربعة حدود برغم أنها ليست مألوفة إلى درجة كبيرة عملياً . على أى حال سوف نعنى فى هذا الفصل فقط بالقضايا المفردة التى تحتوى على حدين فقط مثل

القضية ( ١ ) . وتقدم القضايا المفردة الأكثر تعقيداً تعقيدات لا تتناسب مع التناول الأولى للموضوع .

ودعنا ننظر الآن فى بعض الأمثلة الأخرى من القضايا المفردة التى تحتوى على حدين فقط :

٤ — (حسن) ( شجاع )

٥ — ( لندن ) ( أكبر المدن)

٦ — ( أنديرا غاندى ) ( رئيسة الوزارة الهندية )

٧ — (إيطاليا) ( دولة ذات مناخ دافئ )

وفى كل حالة من الحالات وضعنا علامات على الحدين . وسوف نرى فى كل حالة أن أحد الحدين اسم علم والحد الآخر صفة أو عبارة . ويعرف الاسم العلم بأنه الموضوع المنطقى فى القضية كما تعرف الصفة أو العبارة بأنها المحمول المنطقى ( سيلاحظ القارئ أن هذه الحدود مكيفة من الحدود الفنية فى النحو . وعلى أى حال توجد اختلافات ذات شأن بين الموضوع فى النحو وفى المنطق وكذلك بين المحمول فى النحو وفى المنطق . ولا ينبغى الذهاب إلى حد الاعتقاد بأن الموضوع المنطقى فى قضية معينة هو عين المبتدأ فى العبارة المماثلة أو أن المحمول المنطقى هو عين المحمول النحوى للعبارة المماثلة . وسوف يبقى الأمر فى الواقع على هذا النحو دائماً بلا اختلاف ) . ومن الواضح من الأمثلة المعطاة أن القضية المفردة تقول إن شيئاً معيناً مخصصاً باسم علم يحقق وصفاً بعينه . وستصبح القضية صادقة إذا كان الشيء فى الواقع يحقق الوصف بل إذا كان يحققه فقط .

وسنطلب فيما سوف يتبع هذا إنشاء قضايا تكون صادقة بشأن أى قضايا مفردة مفروضة قسراً . وعلى ذلك فسنستخدم مثل هذه الأحرف :

« أ » . « ب » ، « جـ »

( أو « $أ_1$ » ، « $أ_2$ » ، « $أ_3$ » . . . )

لتقوم مقام أسماء العلم المفروضة قسراً ، وسنستخدم الأحرف :
« ف » ، « ل » ، « ط » لتقوم مقام المحمولات ، وسنطلق اسم « الثوابت الفردية » على الأحرف « أ » ، « ب » ، « جـ » التي تقوم بهذه الطريقة مقام أسماء العلم . أما الأحرف « ف » ، « ل » ، « ط » فسوف يطلق عليها اسم « ثوابت المحمول » . وسيتم وضع القضايا المفردة المفروضة قسراً فى رموز عن طريق تأليفات مثل « ف أ » ، « ل أ » ، « ط ب » وهكذا إلى آخره . وعلى ذلك سوف نفهم التعبير الرمزى « ف أ » على أنه يقرأ كالآتى :

( أ تتصف بالصفة ف )

حيث تقوم « أ » كما هو مفهوم بوظيفتها كاسم علم .

هذه التأليفات من الحروف وبعض التأليفات الأخرى التى ستقدم فيما بعد تسمى صيغ المحمول . ( وسيشار إليها للاختصار باسم « الصيغ » حيثما — كما هو الحال عادة فى الفصل الحالى — لم يوجد أى خطر من الخلط بينها وبين صيغ القضايا التى سبقت معالجتها فى الفصول السابقة من الكتاب ) ، وتفسر هذه الصيغ باعتبارها تقوم مقام أى قضايا مفردة وفقاً للمعانى التى نختارها لنخص بها الأحرف « أ » ، « ب » ، « ف » ، « ل » ، « ط » .. إلخ .. وعلى ذلك من المستحيل تناول موضوع الصدق أو الكذب فى الصيغة . ولكننا نستطيع أن نبين القيمة الخاصة « بالصدق » أو « الكذب » فقط عندما نفسر الثابت الفردى « أ » والمحمول الممثل فى الثابت « ف » داخل الصيغة « ف أ » . وعندئذ سنكون بصدد الكلام عن القضية الناتجة عن إعطاء هذا التفسير إلى « أ » وإلى « ف » بداخل « ف أ » . مثلا إذا فسرنا « أ » على أنها «لندن» وكذلك « ف » على أنها « مدينة كبيرة » حصلنا على القضية الصادقة « لندن مدينة كبيرة » . وبمجرد معرفة التفسير يمكن تخصيص قيمة الصدق truth value بعامة ولكنها خاصية هامة لبعض الصيغ بحيث تصير صادقة بحكم أحد التفاسير

وكاذبة بحكم تفسير آخر . مثال ذلك أنه فى المثل المعطى عاليه تكون القيمة الخاصة بالقضية « ف أ » هى قيمة الصدق إذا فسرنا « أ » على أنها «لندن» وفسرنا « ف » على أنها « مدينة كبيرة » ولكنها تأخذ القيمة « كاذبة » إذا قرأنا « أ » على أنها « لندن » وقرأنا « ف » على أنها « مدينة صغيرة » .

وقد يشعر القارئ ببعض الحيرة بناء على الواقعة التى تشير إلى أن « ف » ، « أ » تسمى ثوابت عندما تفسر « ف أ » بأنها تعنى أى قضية مفردة نختارها . والسبب فى ذلك هو أن الحد « المتغير الفردى » مطلوب منه أن يعنى شيئاً مختلفاً تماماً على نحو ما سيتضح لنا فى الفقرات ٥ ، ٦ . وقد تناولنا الموضوع فى تفصيل أكبر فى الفقرة رقم ٩ . وهناك نقطة يحسن مراعاتها ، وهى أن استخدام كلمة « متغير » فى حساب المحمول معرض لبعض القيود التى لا تقبل التطبيق بالنسبة إلى بعض المعانى الأكثر حسية فى اللفظة التى سبق تقديمها فى عبارة « متغير قضوى » بالفصول رقم ٢ ، ٣ ، ٤ من هذا الكتاب .

## ٣ ـ ملاحظات إضافية عن أسماء العلم والأوصاف :

كان التمييز بين أسماء العلم والأوصاف موضوعاً لقدر كبير من المناقشة الفلسفية . ومن حسن الحظ أن كل أغراض هذه المناقشة ونتائجها لا علاقة لها تماماً تقريباً بدراسة المنطق الأولى . وبالنسبة لأغراض هذا الكتاب فكل ما كان نحوياً اسم علم يكون أيضاً منطقياً اسم علم . لكن هناك عدد من أنواع الخلط التى يحسن الحذر منها .

وأول نقطة نوضحها هى أن القضايا مثل « الرجل شجاع » أو « بعض الرجال شجعان » أو « الفرس حيوان نبيل » ليست من بين القضايا المفردة لأنها لا تشتمل على أى اسم علم . هذه القضايا فى الواقع قضايا معقدة برغم مظهرها البسيط وسوف نناقشها فى موضعها المناسب .

والنقطة الثانية هى أنه برغم أن اسم العلم يخصص وحده على سبيل التفرد ( أعنى أنه يجب أن يستخدم فى مجرى أى برهان جزئى للإشارة إلى فرد واحد فقط ) فليس فى ذلك أى طابع مميز يقوم مقام التعريف لأسماء العلم . وتقوم بعض الأوصاف — على سبيل المثال « الملكة الحالية لبريطانيا » — بوصف فرد واحد فقط . وبرغم ذلك فهـــذه أوصاف وليست أسماء علم . ونستطيع أن نبرز الاختلاف بين هذه العبارات الوصفية المتفردة وأسماء العلم الصادقة بالتنبيه إلى أن بعض الأوصاف من هذا النوع لا تصف أى واحد أو أى شيء . خذ مثلا العبارة : « ملك فرنسا الحالى » ، فى حين ينبغى من ناحية أخرى أن يشير اسم العلم إلى فرد .

وإذا طلبنا وضوحاً أكثر بالنسبة إلى الاختلاف بين اسم العلم والوصف أمكننا أن نتدبر المثل التالى ، فلفظة « بالومبو » هى اسم علم . ولكن إذا عرفت أنك سوف ترى « بالومبو » غداً فلن تدرى إطلاقاً ماذا تتوقع . وقد يكون ذلك إنساناً أو حصاناً أو كلباً أو جبلا أو نهراً أو مدينة أو ما لا حصر له من الأشياء الأخرى . ولا يعطيك اسم « بالومبو » أقل دليل فيما يتعلق بطبيعة الشيء المسمى . أو بعبارة أخرى ليس هذا وصفيًّا .

## ٤ — العلاقات بين حساب القضايا وحساب المحمول :

من المهم مراعاة أن انتقالنا من منطق القضايا غير المحللة إلى منطق المحمولات لا يتضمن حدًّا فاصلا أو قطيعة صارمة مع مناهجنا السابقة فى التناول . إذ ينبنى حساب المحمول على حساب القضايا ويستخدم مناهجه وترقيمه طالما كانت هذه صالحة للتطبيق على نماذج جديدة من البناء المنطقى الذى تعنى به . وتمثل الصيغة القضوية ( س ٧ ص ) قضية مركبة تتألف من أى قضيتين بسيطتين متحدتين بلفظة (أو ) بمعناها الحصرى . ولعلها تمثل أيضاً

أى واحدة من القضايا التالية من (١) إلى (٦) أو أى عدد غير محدد من القضايا الأخرى ذات نفس الصورة المنطقية :

١ ـ إما أن كل الناس فانون أو أن ضعف الاثنين يساوى خمسة .

٢ ـ إما أن مدينة الإسماعيلية تقع بين السويس وبور سعيد أو أن ضعف الاثنين يساوى خمسة .

٣ ـ إما أن يكون محمود غير أمين أو أن بعض المحاسبين مهملون .

٤ ـ إما أن محموداً غير أمين أو أن محموداً غبى .

٥ ـ إما أن محموداً غير أمين أو أن سعيداً غير أمين .

٦ ـ إما أن محموداً غير أمين أو أن سعيداً مخطئ .

* * *

ولنفرض أننا نستبدل الصيغة القضوية المركبة ( س V ص ) بصيغة المحمول ( ف أ V ج أ ) . فهذه الأخيرة تمثل الفصل الشرطى بين القضايا . ولكنها لا تمثل فصلا شرطيا بين أى قضيتين مهما تكونا ، مثلما تفعل (س V ص) وإنما هى تمثل فقط فصلا شرطيًّا بين أى قضيتين مفردتين تجمعان بين نفس الموضوع المنطقى وعدد مختلف من المحمولات . ومن بين الأمثلة المذكورة عاليه من (١) إلى (٦) لا تمثل هذه الصيغة سوى رقم (٤) . وقد نقوم أيضاً بتمثيل القضية رقم (٥) على نفس المنوال بالعبارة (ف أ V ف هـ ) لأنها فصل شرطى بين قضيتين مفردتين لهما نفس المحمول ولكن موضوعاتهما كثيرة مختلفة . وقد يتم وضع المثل رقم (٦) وهو عبارة عن فصل شرطى بين قضيتين مفردتين مختلفتين من حيث الموضوع والمحمول فى صورة رمزية بالعبارة (ف أ V ج هـ) . ولكن كل مثل من الأمثلة (١) ، (٢) ، (٣) يحتوى على الأقل على قضية واحدة بسيطة ليست بقضية مفردة وتقوم كأحد حدود الفصل الشرطى . [ مثال ذلك « بعض المحاسبين مهملون » فى رقم (٣) ]

وهى بالتالى لا يمكن وضعها فى عبارات رمزية مستخدمين الجهاز المنطقى طالما كان فى متناول يدنا إلا بوصفها وحدات قضوية غير محللة ذات الصيغة ( س V ص ) .

وسوف يتبين إذن أن صيغ المحمول من النموذج « ف أ » ، « ف هـ » . « جـ هـ » . . . . إنما تمثل القضايا على طريقة « س » ، « ص » ، « ل » . . . . فى حساب القضايا . ويقتصر الاختلاف بينهما على أن صيغ المحمول تعطى فكرة عن البناء الداخلى للقضايا التى تمثلها فى حين لا تفعل صيغ القضايا شيئاً من ذلك . وعلى هذا قد نستخدم جهاز الثوابت المنطقية والأقواس التى سبق أن استخدمناها إلى حد بعيد فى منطق القضايا من أجل تنمية وتطوير حساب المحمولات .

ومثال ذلك أن الصيغة :

((س ⊂ ص) . ( ـــ ل ⊂ ـــ ص)) ⊂ (س ⊂ ل)

تعد صيغة سليمة فى حساب القضايا . وبالمثل تكون :

((ف أ ⊂ جـ أ) . ( ـــ ف ب ⊂ ـــ جـ أ )) ⊂ (ف أ ⊂ ف ب)

صيغة سليمة فى حساب المحمولات . ويقتصر الاختلاف فيما بين كل من الصيغتين على أن الصيغة الثانية تقدم لنا معلومات إضافية عن :

١ ــ أن القضايا المدرجة تحتها كلها قضايا مفردة .

٢ ــ وأن للقضيتين الأوليين نفس الموضوع ومحمول كل منهما مختلف عن الآخر .

ومحمول القضية الثالثة هو نفس محمول الأولى مع ختلاف الموضوع . وعلى ذلك فى إمكاننا أن ننظر إلى حساب المحمولات كفرع من أفرع المنطق التى تشتمل على حساب القضايا وتتجاوزه . وهذا الفرع يحتوى على حساب القضايا بمعنى أنه إذا كانت إحدى الصيغ فى هذا الحساب سليمة صارت صيغة

المحمول المناظرة سليمة فى حساب المحمولات . ولكن حساب المحمولات يتجاوز حساب القضايا بمعنى أنه — أى حساب المحمولات — يجعل بناء أو هيكل مادة القضايا ظاهراً . ويصبح بسبب ذلك قادراً على أن يعنى بصور البراهين التى تتخطى مجال حساب القضايا . وفقاً لما تتصف به من تعقيد .

٥ — الكم الجزئى للمحمول : الوجود :

تأمل القضايا التالية :

١ — حيوانات القنطور [1] موجودة .

٢ — الخيول موجودة .

فهاتان القضيتان ليستا قضيتين مفردتين لأنهما لا تحتويان على أى أسماء علم . ومن ناحية أخرى يصعب إطلاق اسم تعبير وصفى على لفظة موجود . فالحكم التقريرى بوجود الخيول لا يخبرنا أى نوع من الخيول هو الموجود . فكيف يمكن إذن تحليل مثل هذه القضايا ؟

دعنا الآن نتأمل العبارتين الآتيتين :

٣ — يوجد الشىء الذى يدعى القنطور .

٣ — يوجد الشىء الذى يدعى الحصان .

ومن الواضح أن هاتين العبارتين تعبران تماماً عن نفس القضايا كما تفعل كل من القضيتين الأوليين برغم أن شكل التعبير قد يكون مألوفاً بدرجة أقل . وفى إمكاننا الآن أن نشق كلا من العبارتين (٣) ، ( ٤ ) فى جزأين كما يلى :

٥ — ( يوجد الشىء ) ( الذى هو القنطور ) .

٦ — ( يوجد الشىء ) ( الذى هو الحصان ) .

فهذه العبارة ( يوجد الشىء ) تعبر عن تصور من التصورات الأساسية فى

---

( ١ ) القنطور حيوان خرافى .

المنطق ولا تقبل التحليل إلى ما هو أبعد من ذلك . وتسمى هذه العبارة بالكم الجزئى للمحمول ( أو بتعبير بديل آخر : كم المحمول الوجودى ) ويعد الاسم الموصول ( الذى ) هنا أيضاً أساسياً ، وسنرى أن الدور الذى يؤديه فى المنطق أشبه ما يكون بدور « المتغير » فى الجبر الابتدائى . والواقع أننا نستخدم الحروف ( ﻫ ) ، ( و ) ، ( ى ) فى المنطق بدلا من اللفظة المكتوبة ( الذى ) وكذلك بدلا من لفظة « الشىء » . وعلى هذا تصبح القضايا ( ٥ ) ، ( ٦ ) على النحو التالى .

٧ — ( يوجد « ﻫ » ) ( « ﻫ » هو قنطور )

٨ — ( يوجد « ﻫ » ) ( « ﻫ » هو حصان )

وباستخدام الحروف الضرورية ( ف ) ، ( ج ) كرموز تشير إلى المحمول نضع ( ف ) محل ( هو قنطور ) فى القضية رقم ( ٧ ) ونضع ( ج ) محل ( هو حصان ) فى القضية رقم ( ٨ ) :

٩ — ( يوجد ﻫ ) ( ف ﻫ )

١٠ — ( يوجد ﻫ ) ( ج ﻫ )

ولكننا فى النهاية نعرض الرمز « ← » ليقوم مقام قولنا « يوجد واحد أو أحد » فنحصل على الآتى :

١١ — ( ← ﻫ ) ( ف ﻫ )

( ← ﻫ ) ( ج ﻫ )

وتتميز هذه التعبيرات بأنها تظهر البناء ( الهيكل ) المنطقى فى القضايا مثل « حيوانات القنطور موجودة » ومثل « الخيول موجودة » وتعتمد الخصائص المنطقية لهذه القضايا على هذا البناء ( الهيكل ) .

ولعله قد يظهر لأول وهلة أن عرض هذا الجهاز الرمزى المحكم من أجل التعبير عن قضية بسيطة مثل ( الخيول موجودة ) هو ضرب من إظهار

التعالم الذى لا لزوم له . ولكن الأمر ليس كذلك . إذ أن اكتشاف التحليل الصحيح للقضايا الوجودية وابتكار الأسلوب الرمزى المنطقى الذى يؤدى إلى إظهار بنائها قد أدى بالفعل إلى نتائج هامة فى المنطق وفى الفلسفة . وستتبين بوضوح بعض المزايا المنطقية لهذا الأسلوب الرمزى كلما تقدمنا .

### ٦ ـ تحليل بعض القضايا ذات كم المحمول :

افرض أننا نود أن نقول :

١ ـ حيوانات القنطور غير موجودة

من الواضح أن هذه مجرد نفى لعبارة ( حيوانات القنطور موجودة ) وبالتالى ستأخذ للصورة :

٢ ـ ~ ( ← ه ) ( ه هو القنطور )

أو ٣ ـ ~ ( ← ه ) ( ف ه )

والآن تأمل :

٤ ـ بعض حيوانات القنطور تثأر لنفسها

فهذه تصبح :

٥ ـ ( يوجد الشيء ) ( الذى هو القنطور والذى يثأر لنفسه )

وبوضع ( ف ) محل ( هو القنطور ) ، ( ج ) محل « يثأر لنفسه »

نحصل على :

٦ ـ ( ∃ ه ) ( ف ه . ج ه )

وبالمثل :

٧ ـ لا واحد من حيوانات القنطور يثأر لنفسه

تصبح :

٨ ـ ~ ( بعض حيوانات القنطور يثأر لنفسه )

وهذه تأخذ الصورة :

٩ ـ ـ ( ـــ ﻫ ) ( ف ﻫ . ج ﻫ )

وبالمثل :

١٠ ـ كل حيوانات القنطور تثأر لنفسها

يمكن أن تكتب كالآتى :

(١١) لا واحد من حيوانات القنطور لا تثأر لنفسها .

وهذه تأخذ الصورة :

(١٢) ـ ( ـــ ﻫ ) ( ف ﻫ . ـ ج ﻫ )

وعلينا أن نلاحظ فيما يتعلق بالتعبيرات المماثلة لرقم ( ٦ ) أن :

( ٦ ) ( ـــ ﻫ ) ( ف ﻫ . ج ﻫ )

ليست مثل الآتى :

( ١٣ ) ( ـــ ﻫ ) ( ف ﻫ ) . ( ـــ ﻫ ) ( ج ﻫ )

ذلك أنه وفقاً للمعانى التى تخصص حاليًّا لكل من ( ف ) ، ( ج ) يصبح معنى ( ٦ ) كالآتى :

( ٤ ) بعض حيوانات القنطور تثأر لنفسها .

فى حين أن (١٣) تنص على أن شيئاً ما هو القنطور

وأن شيئاً ما ( وقد يكون نفس الشيء وقد لا يكون ) يثأر لنفمه . أو بعبارة أخرى العبارة رقم ( ١٣ ) تعنى نفس ما تعنيه :

١٤ ـ حيوانات القنطور موجودة والأشياء التى تثأر لنفسها موجودة . وقد يكون هذا صحيحاً تماماً حتى لو لم تكن حيوانات القنطور تثأر لنفسها .

ولا بد أن نبرز هنا بوجه خاص أن الصيغ مثل ( ـــ ﻫ ) ( ف ﻫ ) ، ( ـــ ﻫ ) ( ف ﻫ . ج ﻫ ) وهكذا ، يمكن أن تفسر بأنها تحل محل

عدد كبير من القضايا المختلفة . ( والواقع أنه يمكن أن تفسر أى صيغة من بين هذه الصيغ بعدد كبير لا حد له من الطرق ) . وتعد من أهم خصائص بعض مثيلات تلك الصيغ أنها تعبر عن قضية صادقة وفقاً لبعض التفسيرات وتعبر عن قضية كاذبة وفقاً لبعضها الآخر . وتوجد صيغة أخرى مثل : ( ← ه ) ( ف ه V ــ ف ه ) من الواضح أنها بالضرورة لا بد أن تكون صادقة أيًّا كان المعنى الذى تخصصه لحرف ( ف ) . وشرط الصدق الوحيد لمثل هذه الصيغة هو أن شيئاً ما ــ أيًّا كان ــ لا بد أن يكون موجوداً وبالمثل توجد صيغ أخرى كالعبارة :

( ∃ ه ) ( ف ه . ــ ف ه ) التى يتحتم أن تكون كاذبة أيًّا كان المعنى الذى نعزوه إلى ( ف ) . ( وسيلاحظ القارئ أن تلك الأصناف الثلاثة من صيغ المحمول تماثل على وجه التحديد الصيغ الاحتمالية وصيغ تحصيل الحاصل والصيغ غير السليمة فى حساب القضايا .

وكل هذه الصيغ التى تناولناها حتى الآن هى صيغ كم محمول بسيطة باستثناء رقم (١٣) فيما تقدم . أو بعبارة أخرى تتألف كل هذه الصيغ من كم محمول مفرد تتلوه صيغة مفتوحة[١] مثل ( ف ه ) ، ( ف ه V ج ه ) وهكذا . وسوف نحصر انتباهنا حاليًّا فى مثل هذه الصيغ مع الاهتمام بأكثر صورها تعقيداً مرة أخرى فى الفقرات (١٠) ، (١١) التالية .

---

(١) انظر الفقرة التاسعة القادمة فى نفس هذا الفصل من أجل الحصول على شرح مفصل للصيغ المفتوحة .

٧ ــ كم المحمول الكلى[1] :

القضية :

١ ــ حيوانات القنطور موجودة

يمكن أن يعبر عنها بمقدار ما يهم ذلك بناءها ( هيكلها ) المنطقى بالصورة التالية :

٢ ــ يوجد واحد ه بحيث إن ه هو القنطور

أو ٣ ــ ( ∈ ه ) ( ف ه )

القضية :

٤ ــ حيوانات القنطور غير موجودة

هى عبارة عن نفى ( ١ ) وتأخذ الصورة :

٥ ــ ــ ( ∈ ه ) ( ف ه )

ولكن ( ٤ ) يمكن أن يعبر عنها كالآتى :

٦ ــ لا شىء هو القنطور

أو ٧ ــ أيًّا تكن ه فإن ه ليست القنطور .

وتسمى صورة التعبير « أيًّا تكن ه » بكم المحمول الكلى ويعبر عنها رمزيًّا « ( ه ) » . وبهذا يمكن التعبير عن البناء المنطقى فى (٧) كالآتى :

٨ ــ ( ه ) ( ــ ف ه )

أما القضية :

---

( ١ ) سنطلق اسم « المكيف الكمى » على « كم المحمول » فى بعض الأحيان ولكنهما يعنيان دائماً الشىء نفسه هنا انظر قاموس ريونز ص ٢٦١ . ( المترجم )

٩ — كل شيء هو قنطور

فذات صورة كالآتى :

١٠ — (هـ) (ف هـ)

ولا شك فى أن كلا من (٥) ، (٨) لهما نفس المعنى ويعدكم المحمول الكلى بشكل ما لا لزوم له . إذ يمكن تعريفه فى حدود (ϵ هـ) وكذلك ( ~ ) تماماً مثل الثابتة (٠) التى أمكن تعريفها فى حدود (٧) ، ( ~ ) . ولكننا قد ندخل بطبيعة الحال على نفس المنوال كم المحمول الكلى أولا ثم نقوم بتعريف كم المحمول الجزئى فى حدود خاصة به . فيكون لدينا إما :

أولا : « (هـ) $\hat{أ}$ »

وتعرف بما معناه

« ~ (ϵ هـ) ~ $\hat{أ}$ »

أو ثانياً : « (ϵ هـ) $\hat{أ}$ »

وتعرف بما معناه

« ~ (هـ) ~ $\hat{أ}$ »

[ سوف تستخدم بعض التعبيرات من الشكل « (هـ) $\hat{أ}$ » ، « (ϵ هـ) $\hat{ب}$ » وهكذا إلى آخره فى مقام مختصرات بدلا من التعبيرات العادية ذات كم المحمول . فالحروف التاجية $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، . . . . ستقوم مقام الصيغ المفتوحة البسيطة أو المعقدة من طراز « ف هـ » ، ف هـ ⊃ جـ هـ ، .. إلخ . . . ]

وكيفما كان اختيارنا فمن الواضح أنه حيثما كانت « $\hat{أ}$ » دالة صدق للتعبيرات مثل « ف هـ » ، « جـ هـ » ، . . إلخ . . يمكنا أن نكتب دائماً « (هـ) $\hat{أ}$ » فى موضع

« ∼ (∃ ه) ∼ أ̂ »

أو أن نكتب « (∃ ه) أ̂ » فى موضع « ∼ (ه) ∼ أ̂ » .

وعلى نفس المنوال يمكننا دائماً أن نضع « (∃ ه) ∼ أ̂ » فى موضع

« ∼ (∃ ه) أ̂ » وأن نضع « (∃ ه) ∼ أ̂ » فى موضع

« ∼ (ه) أ » . وعلى ذلك فإذا كانت علامات النفى تظهر قبل صيغة بسيطة ذات كم محمول نستطيع دائماً استبعادها أولا عن طريق قاعدة حذف النفى المزدوج وثانياً عن طريق القواعد المبينة ها هنا . ولهذا السبب يعد إدخال كمين للمحمول أو مكيفين كميين وسيلة جيدة لتبسيط تناولنا للصيغ البسيطة ذات كم المحمول .

**٨ ـ تفسير قضايا كم المحمول على أنها قضايا شرطية متصلة ومنفصلة :**

لعل القارئ قد لاحظ وجه شبه معين من حيث السلوك المنطقى عند ذكر المماثلة السابقة بين قضايا كم المحصول الجزئية والكلية من ناحية والثوابت المنطقية ( V ) ، ( • ) من ناحية أخرى . وكما تعيننا قواعد دى مورجان على تحويل صيغ القضايا من النموذج (س̂ . ص̂ ) إلى النموذج « ∼ ( ∼ س̂ V ∼ ص̂) » وكذلك من النموذج « س̂ V . ص̂ » إلى النموذج « ∼ ( ∼ س̂ . ∼ ص ) » . . . فهناك أيضاً ثنائية متكافئة بين « (∃ ه ) ، (ه) بحيث يمكن تعريفهما بحدود كل منهما الآخر بمعاونة علامة النفى .

ويمكن توضيح ذلك أكثر وأكثر عن طريق النظر إلى العلاقات بين صيغ كم المحمول وبعض القضايا الشرطية المتصلة والمنفصلة من الصيغ المفردة كالآتى :

فقد رأينا أن :

١ – حيوانات القنطور موجودة

يمكن إعادة كتابتها بدون تغيير المعنى على النحو الآتى :

٢ – (يوجد « هـ ») (« هـ » هو قنطور )

وأمامنا الآن فى (١)، (٢) تأكيد بأن شيئاً واحداً على الأقل يتصف بكونه « قنطوراً » . وعلى ذلك تكون القضيتان (١) ، (٢) صادقتين فى حالة واحدة فقط وهى أن تكون :

٣ – إما أن ا١ قنطور أو ا٢ قنطور أو ا٣ قنطور أو . . . . . . . أو ان قنطور .

قضية صادقة حيث إن كلاً من ا١ ، ا٢ . . . . . . ان تنتمى إلى صنف موجود فى السكون . وبالتالى :

٤ – (ءهـ) ( ف هـ)

ستكون صادقة فقط إذا كانت القضية :

٥ – ف ا١ $\vee$ ف ا٢ $\vee$ ف ا٣ $\vee$ . . . . . . $\vee$ ف ان صادقة .

وبذلك نحصل على علاقة بين قضية كم المحمول الجزئيــة والثابت المنطقى « $\vee$ » .

وبالمثل إذا أردنا تأكيد قضية كلية مثل :

٦ – كل شىء مادى

كان ذلك ممكناً فى حالة واحدة فقط وهى أن تكون القضية التالية (٧) صادقة .

٧ – ا١ موجود مادى و ا٢ موجود مادى و . . . . . . . و ان موجود مادى .

حيث إن كلا من ا١ ، ا٢ ، . . . . . . ان كما هو الحال من قبل عبارة عن أشياء موجودة فى الكون .

ويمكننا التعبير عن القضية (٦) بطريقة رمزية على النحو الآتى :

٨ ــ (هـ) (ف هـ)

كما يمكن التعبير عن القضية (٧) بطريقة رمزية على النحو الآتى :

٩ ــ « ف ا١ . ف ا٢ . ف ا٣ . . . . ف ان .

بحيث يمكن بذلك الحصول على علاقة بين قضية كم المحمول الكلية وقضية شرطية متصلة .

وسنطلق على كل من القضيتين (٥) ، (٩) اسم « فلك الأحكام » بالنسبة إلى القضيتين (٤) ؛ (٨) على التوالى .

ونحن نعرف هنا من قواعد جساب القضايا أن :

١٠ ــ (ف ا١ V ف ا٢ V . . . . V ف ان) ≡

ــ ( ــ ف ا١ • ــ ف ا٢ • . . . . ــ ف ان )

١١ ــ (ف ا١ • ف ا٢ • . . . . ف ان) ≡

ــ ( ــ ف ا١ V ــ ف ا٢ V . . . « V ــ ف ان )

وقد رأينا فيما سبق أنه إذا كانت

« ا١ . . . . ان » تمثل كل الأشياء فى الكون فإن الجانب الأيمن من القضية (١٠) يكون صادقاً فى حالة واحدة فقط هى عندما تكون

١٢ ــ (هـ) (ف هـ)

صادقة . بل أكثر من ذلك أن القضية (١٢) مكافئة للقضية :

١٣ ــ ــ (هـ) (ــ) (ــ ف هـ)

وتكون (١٣) صادقة فى حالة واحدة فقط وهى أن يكون الجانب الأيسر من

(١٠) صادقاً . وبالمثل يكون الجانب الأيمن من (١١) صادقاً فى حالة واحدة فقط وهى عندما تكون :

١٤ ـ ( ه ) ( ف ه )

صادقة . والقضية (١٤) هى نفس الشىء كالقضية :

١٥ ـ ــ ( ∈ ه ) ( ــ ف ه )

التى تكون صادقة فى حالة واحدة فقط وهى أن يكون الجانب الأيسر من القضية (١١) صادقاً . وبهذا يعد ازدواج قضايا كم المحمول ( ه ) ، ( ∈ ه ) نتيجة مترتبة على قواعد دى مورجان التى تقوم بمثابة قوانين حساب القضايا .

ومن المهم ملاحظة أن هذه العلاقة فيما بين الصيغ ذات كم المحمول وبعض القضايا الشرطية المتصلة والمنفصلة تكون قائمة عامة عندما يكون رقم عدد أعضاء الفئة المعنيين محدوداً . ولسنا بحاجة إلى بذل الاهتمام بإمكان توافر مستويات لا نهائية لأعضاء الفئة فى هذه المرحلة . (راجع الفصل السادس ـ الفقرة الأولى ) .

**٩ ـ المتغيرات الحرة والمتغيرات المقيدة ـ الثوابت :**

قد ينشأ قدر من الاضطراب فى أذهان الطلاب حول استعمال كلمات : « ثابت » و « متغير » فى حقل المنطق . ولعـــل القليل من الألفاظ سيكون مفيداً هنا فى هذه المرحلة للتفسير . ففى هذا الجزء من المنطق الذى يعالجه هذا الفصل يجرى استخدام ستة أنواع مختلفة من الرموز :

١ ـ ثوابت مفردة ا ، ب ، جـ ...

٢ ـ متغيرات مفردة هـ ، ى ، م ...

٣ ـ ثوابت المحمول ف ، ط ، ك ...

٤ ــ كم المحمول (ه) ، (ه٤) ، (ى) ، (ى٤) . . .

٥ ــ ثوابت منطقية أو « وصلات » : ~ ، V ، . ، ⊂ ، ≡

٦ ــ أقواس مثل ( ، )

فإذا سلمنا بهذا عمدنا إلى تعريف فئة من الصيغ السليمة (أو ذات المعنى) على النحو الآتى :

١ ــ إذا كانت « ا » ثابت محمول وكانت « ح » ثابت مفرد أو متغير مفرد . . .

كانت « ا ح » صيغة سليمة ( أو « ص س » للاختصار) .

٢ ــ إذا كانت « ا » عبارة عن « ص س »

فكذلك تكون « ~ ( $\hat{ا}$ ) »

٣ ــ إذا كانت « $\hat{ا}$ » ، « $\hat{ب}$ » صيغاً سليمة (ص س) فكذلك تكون « ( $\hat{ا}$ ) . ( $\hat{ب}$ ) » وكذلك تكون « ( $\hat{ا}$ ) V ( $\hat{ب}$ ) » وهكذا . . .

٤ ــ إذا كانت « $\hat{ا}$ » صيغة سليمة (ص س) تحتوى على متغير مفرد حر هو (ا) . . . فإن « (ا) ا » ، « ( ا←⟶ ) $\hat{ا}$ » عبارة عن صيغ سليمة (ص س) .

والمقصود بالصيغة المحتوية على متغير مفرد حر الصيغة من نوع « ف ه » أو « ى » (ف ى ⊂ ط ه) حيث يوجد متغير (فى هذه الحالة هو « ه ») لا يسبقه كم محمول ملائم . وتسمى مثل هذه الصيغ باسم « الصيغ المفتوحة » فى مقابل « الصيغ المقفلة » التى لا تحتوى على أى متغيرات حرة . أما المتغير المقيد فهو ذلك الذى يسبقه كم محمول ملائم . وعلى ذلك فإن « ى » يكون

متغيراً مقيداً كما يكون « هـ » متغيراً حراً فى العبارة :

( ى ) ( ف ى ⊃ ط هـ )

وعندما نتكلم عن الصدق والكذب فى المنطق فإننا نعنى بذلك الصدق المنطقى ( أو الصحة المنطقية ) والكذب المنطقى ( أو عدم الصحة المنطقية أو التناقض ) .

وفى الفصل الثانى تناولنا هذا النوع من الصدق والكذب من حيث علاقته بمنطق القضايا . ولكننا إذا شئنا استخدام ألفاظ « الصدق » و « الكذب » بمعناها العادى فإننا نستطيع ذلك فقط عن طريق وضع القواعد التى تيسر إعطاء تفسير لصيغنا ( أو بعضها ) على أنها تقوم مقام القضايا . وبالتالى سوف نقول إن الصيغة سليمة فى حالة واحدة فقط وهى عندما تكون القضية التى تفسر أو توضح معنى تلك الصيغة على أنها تقوم مقامها صادقة . ونحن نقوم بتفسير الصيغة بأن نعزو بعض المعانى إلى الثوابت المتوافرة بداخلها . وعلى ذلك فقد نخص ( ا ) بمعنى الشخص « محمود » ونخص ( ف ) بمعنى صفة كونه طويلا . ومن ثم نكون قد أعطينا الصيغة ( ف ا ) معنى معيناً هو أن « محموداً طويل » وتكون ( ف إ ) صادقة فى حالة واحدة فقط وهى أن يكون محمود طويلا . وبالطبع يمكننا أن نفسر ( ف ا ) بمعنى مختلف تماماً عن ذلك . ولكن المهم هو أننا بمجرد ما نعزو معنى معيناً إلى إحدى الصيغ فى سياق بعينه نثبت عليه ولا نحيد عنه بحال .

وبهذا يصبح الفارق بين الثوابت والمتغيرات واضحاً الآن .

١ ـ الثوابت لا يمكن أن تحدد كمياً .

٢ ـ لا يمكن إعطاء تفسير أو إسباغ أحد المعانى على المتغير .

ولهذا السبب الأخير لا يمكن أن يقال بحال من الأحوال عن الصيغ التى تحتوى على متغيرات حرة إنها صادقة أو كاذبة . تأمل مثلا الفارق بين ( ف ا ) ، ( ف هـ ) . وافرض أن « ا » تعنى « رقم خمسة » وأن « ف » تعنى « عدداً فردياً »

إذن ( ف ا ) تشير إلى أن الرقم خمسة عدد فردى وهو فعلا كذلك . وعلى ذلك فالعبارة ( ف ا ) صحيحة بهذا المعنى . ولكن ( ف ه ) تقرلى فقط إن « ه » رقم فردى . وذلك تعبير لا هو بالصادق ولا هو بالكاذب[1] . ونستطيع إذا شئنا أن نقول بطبيعة الحال إن ( ه رقم فردى ) صحيحة بحكم بعض القيم الخاصة فى ( ه ) وكاذبة بحكم قيم أخرى .

والواقع أننا ( فى هذه المرحلة ) فى المنطق لسنا حقيقة شديدى الشغف بالتفسيرات الخاصة بالصيغ . وذلك لأننا كمناطقة لا نعير اهتماماً كبيراً للصدق الخاص بالوقائع أو للصدق التجريبى . بل نحن معنيون بالصدق المنطقى . ومن أهم الأغراض التى يهدف إليها عرض النظريات المنطقية إعطاء معنى واضح لعبارة « الصدق المنطقى » . ونحن نقترح ما يلى كتفسير جزئى على أقل تقدير « للصدق المنطقى » :

تكون الصيغة صادقة منطقياً فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت صادقة مهما يكن التفسير الذى نعطيه للثوابت فيها .

وهذه لا شىء سوى إعادة تقرير أوضح للمذهب القديم القـائل بأن الاستدلال الصحيح مستقل عن مادته أو مضمونه . ( انظر الفصل الأول ) ،

---

( ١ ) يشار غالباً إلى ( ه عدد فردى ) ، ( ه لون أحمر ) وهكذا بوصفها دوال قضوية . وقد عرف اللورد برتراند رسل دالة القضايا التى أدخل تعبيرها فى المنطق على أنها « تعبير يحتوى على واحدة أو أكثر من المكونات المحددة بحيث يصبح هذا التعبير قضية بمجرد تخصيص بعض القيم لهذه المكونات » ( انظر مقدمة إلى الفلسفة الرياضية ص ١٥٥ — ١٥٦ ) ومن الأفضل تفادى هذا التعبير فى المعالجة الأولية للمنطق الرمزى بسبب بعض التقنيات المرتبطة باستخدام كلمة « دالة القضايا » أو « الدالة القضوية » فى منطق رسل. « المؤلف »

ولكن هذه العبارة ليست تعريفاً نهائياً أو كلمة أخيرة إذا صح هذا القول . وإنما يكفى هذا بالنسبة للعرض الحالى .

والنقطة الثانية التى نرجو أن تكون موضع عناية القارئ هى أن فكرة الصدق المنطقى ( كفكرة متميزة من الصدق الخاص بالوقائع ) تمتد لتشمل الصيغ المفتوحة . وهذا يتحقق بقولنا إن الصيغ المقترحة صادقة منطقيا إذا كان كمها الكلى صادقاً منطقياً . أو بتعبير آخر أن تكون :

( ف هـ ⊂ ف هـ )

صادقة منطقياً لأن

( هـ ) ( ف هـ ⊂ ف هـ )

صادقة منطقياً . وأن تكون

( ى ) ( ف ى ⊂ ط هـ )

غير صادقة منطقياً لأن

( هـ ) ( ى ) ( ف ى ⊂ ط هـ )

غير صادقة منطقياً .

**١٠ — التفسير والصيغ المستوفاة :**

يمكن تفسير الصيغة المفردة مثل ( ف ا ) على أنها تقوم مقام قضية صادقة أو قضية كاذبة . فمثلاً لو أعطينا ( ا ) معنى « سقراط » وأعطينا ( ف ) معنى « فان » فسيكون من شأن ( ف ا ) أن تمثل القضية الصادقة التالية :

( سقراط فان )

وإذا جعلنا ( ا ) تشير إلى « أفلاطون » وجعلنا ( ف ) تعنى ( حى إلى اليوم ) فسيكون معنى ( ف ا ) ما يلى :

( أفلاطون حى إلى اليوم )

وهى قضية كاذبة . وعلى ذلك فقد تشير أى صيغة مفردة إلى قضية صادقة وهو ما نعبر عنه بقولنا :

( ا ) أى صيغة مفردة هى صيغة مستوفاة

إذا تأملنا دوال الصدق الخاصة بالصيغ المفردة فمن السهل أن نلاحظ أنها تصبح مستوفاة فى حالة واحدة فقط وإذا لم تكن دالة الصدق متناقضة . فإذا لم تكن دالة الصدق متناقضة كان ثمة تفسير للصيغ المفردة فيها يؤدى إلى صدق الدالة . مثلا لنفرض أن الدالة التى نضعها موضع الاعتبار هى :

١ ــ ( ف ا V ف ب ) ⊂ جـ د

فإذا فسرنا ( ا ) ، ( ب ) ، ( جـ ) على أنها « سقراط » و « أفلاطون » و « أرسطو» على التوالى وفسرنا متغيرات المحمول ( ف ) ، ( جـ ) بألفاظ «فان» و « ذكى» حصلنا على ما يلى :

٢ ــ إذا كان سقراط فانياً أو كان أفلاطون فانياً كان أرسطو ذكياً .

وبتحليل قيم الصدق فى ( ٢ ) نحصل على ما يلى :

( ( ١ V ١ ) ⊂ ١ ) = ( ١ ⊂ ١ ) = ١

ومن الواضح بالمثل أننا لا نستطيع أن نجعل الدالة المتناقضة صادقة مهما تكن المعانى التى نعزوها إلى الصيغ المفردة . ولا يؤدى أى تفسير إلى أن :

٣ ــ ( ف ا . ســ ف ا )

تصبح قضية صادقة . وذلك لأنه إذا كانت ( ف ا ) صادقة كانت ( ســ ف ا ) كاذبة على الدوام والعكس صحيح . وبالتالى فدالات الصدق المتناقضة لن تكون مستوفاة وستظل دائماً بغير استيفاء . وبهذا نحصل على :

**ب – تكون دالة الصدق للصيغ المفردة مستوفاة فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت غير متناقضة .**

ولنتأمل الآن صيغاً مثل :

ا – ( ∃ ه ) ( ف ه )

اا – ( ∃ ه ) ( ف ه V ج ه )

إلخ . . إلخ . . مما يحتوى فقط على صيغة كم محمول جزئية واحدة . ونحن نعرف أن :

( ∃ ه ) ( ف ه ) تعنى مثلا أنه يوجد هنالك شىء يحمل الخاصية ( ف ) وسيكون هذا التعبير صادقاً فى حالة واحدة فقط وهى إذا كان ثمة صيغ مفردة من نوع ( ف ا ) صادقاً . وبالمثل ستكون الصيغة :

( ∃ ه ) ( ف ه V ج ه )

صادقة فى حالة واحدة فقط وهى إذا كان بعض تفسير الصيغة ( ف ا V ج ا ) صادقة . وقد رأينا أنه حينما كانت لدينا صيغة من نوع :

( ∃ ه ) $\hat{ا}$

( التى تكون المتغيرات الفردية فيها مقيدة بصيغة بكم محمول جزئية واحدة ) كان فى الإمكان بسطها فى صيغة شرطية منفصلة مكافئة لها من القضايا الجزئية ( أو دالات الصدق الخاصة بمثل هذه القضايا ) مثال ذلك :

٤ – ( ∃ ه ) ( ف ه · ~ ج ه )

يمكن بسطها كالتالى :

٥ – ( ف $أ_١$ · ~ ج $أ_١$ ) V ( ف $أ_٢$ · ~ ج $أ_٢$ ) V . . .

V ( ف ان · ~ ج ان )

وعلى ذلك ستكون الصيغ من نوع ( ∃ هـ ) $\hat{أ}$ مستوفاة فى حالة واحدة فقط وهى إذا كان بسطها قضوياً غير متناقض . فمثلا :

٦ – ( ∃ هـ ) ( ف ٠ ∼ ف هـ )

تبسط كالآتى :

٧ – ف $أ_{1}$ ٠ ∼ ف $أ_{1}$ ) ∨ ( ف $أ_{2}$ ٠ ∼ ف $أ_{2}$ ) ∨ ٠٠٠ ∨ ( ف $أ_{ن}$ . ∼ ف $أ_{ن}$ )

التى يبدو تناقضها بوضوح . وبهذا تكون ( ٦ ) غير مستوفاة . وبهذا نحصل على :

( ج ) تكون الصيغ من النموذج ( ∃ هـ ) $\hat{أ}$ الذى تقيد متغيراته الفردية بواسطة كم محمول وجودى مفرد مستوفاة فى حالة واحدة فقط هى إذا كانت امتداداتها المتوسطة القضوية غير متناقضة .

وفى النهاية نحصل على صيغ مثل ( هـ ) $\hat{أ}$ التى تتكون امتداداتها المنبسطة القضوية من شرطيات متصلة فى الشكل الآتى :

٨ – $\hat{س}_{1}$ ، $\hat{س}_{2}$ ٠ $\hat{س}_{3}$ ٠٠٠٠٠ $س_{ن}$

حيث تكون السينات قضايا جزئية ( من النوع ف أ ) أو دالات صدق خاصة تمثل هذه القضايا الجزئية . فمثل هذه الصيغة ( هـ ) $\hat{أ}$ تعبر عن أن كل شىء يستوفى شروط « $\hat{أ}$ » . أو بعبارة أخرى تكون ( هـ ) $\hat{أ}$ صادقة فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت نتيجة وضع ( أ ) محل ( هـ ) فى سائر ( $\hat{أ}$ ) قضية صادقة مهما كان ما تشير إليه ( ا ) . لنفرض مثلا أنه توجد لدينا الصيغة الآتية :

٩ – ( هـ ) ( ف هـ )

فإذا كان مسلماً بأن صفة معينة يتصف بها كل شيء فى الكون وفسرت (ف) بأنها تشير إلى تلك الخاصية كانت (ف أ) صادقة مهما تكن المعانى التى نعزوها إلى «أ» وإذا كانت (أ̂) صيغة مفتوحة ذات طابع جزئى مثل :

١٠ — (ف هـ ⊂ جـ هـ) V م هـ

وأحللنا (أ) محل (هـ) حصلنا على ما يلى :

١١ — (ف أ ⊂ جـ أ) V م أ

وستكون هذه صادقة بالنسبة إلى بعض قيم الصدق الخاصة بالمكونات مثل:

(١ ⊂ ١) V صفر) = (١ V صفر) = ١

لأننا نستطيع أن نتعمد أعداد رقم (١١) لكى تكون قضية صادقة مهما كان ما تشير إليه (أ) عن طريق اختيار معانى مناسبة لكل من (ف) ، (جـ) ، (م) . وعلى هذا ستكون :

١٢ — (هـ) ((ف هـ ⊂ جـ هـ) V م هـ)

مستوفاة . وفى العموم :

(د) تكون (هـ) أ̂ مستوفاة إذا كان انبساطها قضوياً غير متناقض .

١١ — الصيغ المستوفاة معاً فى وقت واحد :

تعدّ الصيغتان — أو زوج الصيغ — (أ̂) ، (ب̂) مستوفيتين فى آن معاً إذا كان فى إمكاننا أن نخص ثوابت المحمول والثوابت الفردية (إذا كان ثمة) فى كل من (أ̂) ، ) (ب̂) معبراً عن قضايا صادقة .

(بطبيعة الحال إذا ظهر نفس الحرف مثلا «ف فى كل من «أ̂» ، «ب̂»

كان من الضرورى أن يحمل نفس التفسير فى كلتا الحالتين ) .

وإذا عدنا إلى النوع البسيط من الصيغ ذات كم المحمول التى تأملناها وجدنا أن هناك ثلاثة أنواع ممكنة فقط من الصيغ الزوجية :

ا – ( ه ) أ̂ : ( ه ) ب̂

اا' – ( ه ) أ̂ : ( ∍ ه ( ب̂ )

ااا – ( ∍ ه ) أ̂ : ( ∍ ه ) ب̂

( تعد الحالة :

( ∍ ه ) أ̂ ، ( ه ) ب̂

بوضوح من نفس نوع الحالة مثل رقم ( ٢ ) فى أمثلة الفقرة السابقة ) .

ومن الواضح الآن أن الصيغ لابد أن تكون مستوفاة فرديًّا إذا كانت مستوفاة فى آن معاً . غير أن هذه ليست الحالة الوحيدة . وذلك لأن ( ه ) ( ف ه ) ، ( ه ) ( ~ ف ه ) تعدان مستوفيتين فرديًّا وإن لم تكونا معاً مستوفيتين فى آن معاً . ومن الواضح أنه إذا كانت ( ه ) ( ف ه ) صادقة كانت ( ف أ ) صادقة مهما افترضنا ما تشير إليه ( أ ) . وبالمثل إذا كانت

( ه ) ( ~ ف ه )

صادقة كانت ( ~ ف أ ) أيضاً صادقة أيًّا كان ما تشير إليه ( أ ) . ولكن إذا كانت ( ف أ ) صادقة كانت ( ~ ف أ ) إذن كاذبة ما دام ( ف أ . ~ ف أ ) دالة صدق متناقضة . ومن ناحية أخرى ( ه ) ( ف ه ) ، ( ه ) ( ف ه ⊂ ج ه ) تعدان مستوفيتين فى آن معاً وهذا ظاهر من واقعة أن ( ف أ ) . ( ف أ ⊂ ج أ ) ليست متناقضة . ويمكن فحص هذه بوضعها فى جدول الصدق :

| ف أ | . | ( ف أ | ⊃ | ج أ ) |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٠ | ١ | ٠ | ٠ |
| ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ١ |
| ٠ | ٠ | ٠ | ١ | ٠ |

وإذا كان التعبير متناقضاً لزم أن يحتوى العمود الثانى ( تحت علامة الشرطى المتصل ) على مجموعة من الدوائر ( الأصفار ) الكاملة .

( وعلى القارئ أن يقيم جدولا مناظراً للعبارة « ف أ . ~ ف أ » كى يرى مدى التعارض ) .

وبالتالى نحصل على القاعدة التالية :

ا – ( ه ) أ̂ ، ( ه ) ب̂ تكونان مستوفيتين فى آن معاً فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت أ̂ . ب̂ متآلفة من ناحية دالة الصدق[1] .

وبنفس طريقة البرهان نحصل على ما يلى :

اا – ( ه ) ا ، ( ∃ ه ) ب تعدان مستوفيتين فى آن معاً فى حالة واحدة فقط هى إذا كانت أ̂ . ب̂ متآلفة من ناحية دالة الصدق[2] .

وإذا عدنا إلى الحالة الثالثة (ج) فى الفقرة السابقة كان علينا أن نصوغ قاعدة مختلفة . فتكون ( ∃ ه ) ( ~ ف ه ) مستوفيتين فى آن معاً لأن ( ∃ ه ) ( ف ه ) تكون صادقة فى حالة واحدة فقط هى إذا كانت :

(١) ( ف $أ_١$ v ف $أ_٢$ v ... v ف $أ_ن$ )

---

(١، ٢) يلاحظ أن القواعد قد وضعت من أجل الاختصار برغم أنه من الضرورى جداً أن نضيف ( وذلك عندما يحل محل المتغيرات الفردية ثوابت فردية ) – راجع نهاية للفقرة رقم ٩ من هذا الفصل .

صادقة كما تكون (ع هـ) صادقة فى حالة واحدة هى إذا كانت :

(٢) ( ~ ف $أ_١$ V ~ ف $أ_٢$ V ... V ~ ف $أ_ن$ )

صادقة .

وهنا ستكون رقم (١) صادقة فى حالة واحدة فقط عندما يكون واحد على الأقل ف $أ_١$ — ف $أ_ن$ صادقاً . ونفرض إذن أن ف $أ_١$ صادقة والباقى كاذب . عندئذ ( ~ ف $أ_٢$ ستكون صادقة وعلى ذلك تصبح رقم (٢) صادقة ما دامت (٢) مثل رقم (١) تكون صادقة إذا كان واحد على الأقل من بين المكونات الخاصة بالشرطية المنفصلة صادقاً . وبهذا يكون رقم (١) ورقم (٢) مستوفيتين بوضوح فى آن معاً . وعلى ذلك تكون :

( ع هـ ) (ف هـ ، ( ع هـ ) (~ ف هـ )

مستوفيتين كذلك فى آن واحد وبهذا نحصل على ما يلى :

١١١ — (ع هـ) $\hat{أ}$ ، ( ع هـ ) $\hat{ب}$ تكون مستوفيتين فى آن معاً فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانتا فردياً مستوفيتين .

**١٢ — القياس التقليدى :**

الصيغ الثلاث التالية ليست مستوفاة فى آن معاً :

(١) — (هـ) (ف هـ ⊂ ج هـ ) ، (هـ) ( ج هـ ⊂ م هـ ) ، ( ع هـ ) (ف هـ . ~ م هـ )

وباستخدام الاختبار على نحو ما هو مبين فى الفقرة السابقة نعرف أن رقم (١) سيكون مستوفى فى آن معاً فقط إذا كانت :

(٢) — ( ف أ ⊂ ج أ ) . ( ج أ ⊂ م أ ) . (ف أ . ~ م أ )

متآلفة عن طريق جداول الصدق أى إذا كان العمود الأوسط فى جدول الصدق محتوياً على « الواحد » ولو مرة على الأقل . ومن اليسير على أى حال أن نرى رقم (٢) يحتوى من حيث دالة الصدق على تناقص أى أن جدول

الصدق الخاص به يحتوى فى عموده الأوسط على « أصفار فقط » .

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالحدس عن طريق بحث تفسير رقم ( ١ ) . نفرض أن ( ف ) تعنى « القنطور » وأن ( جـ ) تعني « المنتقم » وأن ( م ) تعنى « شجاع » . فعلى ذلك ينشأ :

(٣) – (ه) (ف ه ⊂ جـ ه) تعنى

(٣) – كل القنطورات منتقمة

(٤) – (ه) (جـ ه ⊂ م ه) تعنى

(٤) كل المخلوقات المنتقمة شجاعة

(٥) – (ء ه) (ف ه . ∼ م ه) تعنى

(٥) – بعض القنطورات ليست شجاعة .

وبهذا من الواضح أنه إذا صدقت كل من (٣َ) ، (٤َ) كان من الضرورى أن تكون (٥َ) كاذبة .

وتعرف مجموعة الصيغ فى رقم (١) باسم الثلاثى غير المتآلف « لاد فرانكلين » وهى ما يعد الأساس الصورى الذى يدفع بالمشروعية المنطقية معظم القياسات التقليدية[1] وبما أن ثلاث الصيغ ليست مستوفاة فى آن معاً فمن الواضح أنه من صدق أى اثنتين منها يمكن الاستدلال على كذب الثالثة . أو إذا أعطينا أى اثنتين منها كمقدمات أمكن الاستدلال على نفى الثالثة . وعلى ذلك :

(٦) – ((ه) ف ه ⊂ حـ ه) . (ه) (جـ ه ⊂ م ه)) .

إذن (ه) (ف ه ⊂ م ه) .

(٧) – ((ه) (ف ه ⊂ جـ ه) . (ء ه) (ف ه . ∼ م ه)) .

إذن (ء ه) (جـ ه . ∼ م ه) .

(٨) – ((ه) (جـ ه ⊂ م ه) . (ء ه) (ف ه . ∼ م ه)) .

إذن (ء ه) (ف ه . ∼ جـ ه) . ،

---

(١) يدعى هذا القياس بهذا الاسم نسبة إلى السيدة كريستين لاد – فرانكلين (١٨٤٧ – ١٩٣٠) عالمة المنطق الأمريكية .

وكلها صور صحيحة من صور الاستدلال ..

وتقع الاستدلالات الواردة فى الفقرة الأولى كلها تحت إحدى صور الاستدلال من رقم (٦) إلى رقم (٨) . وبذلك يمكننا أن نضع « ف » فى رقم (١) على أنها تشير إلى (الأعضاء العاديين فى المجتمع) ، وقد نضع « ج » لتشير إلى (يدفع اشتراكاً سنوياً قيمته جنيه واحد) ، ونضع « م » لتشير إلى (يتلقى مطبوعات الجمعية بدون التزامات مالية جديدة) . وفى المثل رقم (٢) نضع « ف » لتشير إلى (أرساليين) ، ونضع « ج » لتشير إلى (ذوى نظرات أخلاقية صارمة) ، ونضع « م » لتشير إلى (لا يصلحون كعلماء جيدين فى علم الإنسان) وفى المثل رقم (٣) نضع « ف » لتشير إلى (الذين لم يحصلوا على الشهادة الجامعية بعد) ونضع « ج » لتشير إلى (لهم الحق فى استخدام مكتبة الجامعة) ونضع « م » لتشير إلى (لهم رغبة جادة فى الحصول على منحة) .

هناك عدد قليل جداً من القياس لا تشمله صيغة لاد — فرانكلين . وتلك هى القياسات التى تستخلص فيها نتيجة جزئية من مقدمات كلية . مثلا :

كل القنطورات منتقمة

بعض القنطورات شجاعة

إذن بعض المخلوقات المنتقمة شجاعة .

وبوضع « ف » لتشير إلى (قنطورات) ، وبوضع « ج » لتشير إلى (منتقمة) وكذلك « م » لتشير إلى (شجاعة) نحصل على ما يلى :

(٩) — (ه) (ف ه ⊂ جـ ه) ، (ه) (ف ه ⊂ م ه) .

إذن (∃ ه) (جـ ه . م ه)

وبنفى النتيجة فى رقم (٩) نحصل على الثلاثية :

(١٠) — (ه) (ف ه ⊂ جـ ه) ، (ه) (ف ه ⊂ م ه) ،

(ه) (جـ ه ⊂ ~ م ه)

وليست هذه نفس الشيء مثل رقم ( ١ ) وبرغم ذلك فهى متآلفة لأن :

( ١١ ) ــ ( ف أ ⊂ جـ أ ) . ( ف أ ⊂ م أ ) . ( جـ أ ⊂ ~ م أ )

تكون صادقة إذا عزونا إلى (أ) معنى بحيث تصبح (ف أ) : (جـ أ ) ، ( م أ ) كلها كاذبة . وهذا يعنى أن الاستدلال يكون غير صحيح ، إذا لم يكن ثمة أى قنطورات . وعلى ذلك فمن أجل جعلها سليمة منطقية (صحيحة) يجب أن ندخل مقدمة إضافية تؤكد وجرد القنطورات بحيث يكون لدينا (بدلا من رقم « ٩ » ) ما يلى :

( ١٢ ) ــ (( ∈ هـ ) ( ف هـ ) . ( هـ ) ( ف هـ ⊂ جـ ) . ( هـ )
( ف هـ ⊂ م هـ ))

إذن ( ∈ هـ ) ( جـ هـ . م هـ هـ )

(وفى موضع رقم « ١٠ » )

( ٣ ) ــ ( ∈ هـ ) ( ف هـ ) ، ( هـ ) ( ف هـ ⊂ جـ هـ ) ، ( هـ )
( ف هـ ⊂ م هـ ) ، ( هـ ) ( جـ هـ ⊂ ~ م هـ ) .

وليست أربع الصيغ فى رقم ( ١٣ ) مستوفاة فى آن معاً بحكم أن تعبير دالة الصدق ،

( ١٤ ) ــ ف أ . ( ف أ ⊂ جـ أ ) . ( ف أ ⊂ أ م ) .
( جـ أ ⊂ ~ م ا )

متناقض [١] وهذا بخلاف رقم (١١) . وبالتالى يكون الاستدلال رقم (١٢) صحيحاً منطقياً . وإذا أخذنا أى ثلاث من بين الصيغ الأربع فى رقم ( ١٣ ) كمقدمات أمكننا أن نعمم صوراً منوعة من الاستدلال التى تشتمل على بعض الأشكال التى لم يعترف بها التخطيط الإجمالى التقليدى .

---

( ١ ) يستطيع الطالب أن يختبر ذلك نفسه عن طريق بناء جداول الصدق المناسبة .

**مراجع الفصل الخامس :**

تقع البيانات الوافية الأولية الخاصة بحساب المحمول المحصور تحت فئتين أو صنفين : أحدهما الرصفى وثانيهما الأكثر دقة . وستجد بيانات وصفية وافية فى كتاب أمبروزولا زيروفيتش ( ١ ) وفى كتاب استروسن ( ٣٠ ) وتوجد تفصيلات أوليـــة أكثر دقة فى كتاب كولى ( ٧ ) وكتاب رايشنباخ (٢٥) . ويقدم إيتون ( ١٠ ) فى كتابه مقدمة وصفية مفيدة للرمزية المستخدمة فى البرنكيبيا ( ٣٣ ) والتناول الكامل لهذا الموضوع موجود فى كتاب هيلبرت وأكرمان ( ١٢ ) .

الفصـــل السادس

# بعض التطورات والأبعاد الهامة

## ١ ــ توسعات فى صنف الصيغ :

لقد بحثنا بالتفصيل فى الفصل الخامس صنفاً محدوداً من صيغ حساب المحمول أو حساب الدالات . وسنحاول هنا أن نعدد على وجه الدقة محتويات هذا الصنف :

i ــ الصيغ الذرية وهى التى تشتمل على ثابتة محمول واحد متبوعة بمتغير فردى . مثال ذلك (ف هـ) ، (جـ هـ) ، (ف ى) . وما شابه ذلك .

ii ــ دوال الصدق الخاصة بالصيغ الذرية . . وكلها تحتوى على نفس المتغير الفردى . فمثلا .

(ف هـ ⊂) ، (جـ ى V ل ى) وهكذا إلخ ...

iii ــ الصيغ المقفلة التى تنتج عن وضع (د هـ) أو (هـ) ، (د ى) ، (ى) وما شابه ذلك فى مقدمة الصيغ من النوع (i) ، (ii) . مثال ذلك :

(د هـ) (ف هـ) ، (ى) (جـ ى V ل ى)

وما شابه ذلك من المتغيرات . فالمتغير الواقع فى كم المحمول أو ما يصح أن نسميه بالمكيف الكمى[1] لا بد أن يكون هو نفس الشىء هنا كالمتغير

---

(١) استخدمنا لفظ كم المحلول حتى الآن للتعبير Quantifier على أساس أنه يقع فى الجملة كتحديد كمى للمحلول . ولكن وضعه يأتى عادة كرمز بين قوسين فى أول العبارة للتمهيد لظهوره مرة أخرى فى العبارة كمكيف كمى للقضية . وهذا هو ما يدفعنا إلى استخدام تعبير مكيف كمى أحياناً .

الواقع فى الصيغة التالية :

( iiii) دول الصدق الخاصة بالصيغ من النوع ( iii ) .

ولنتأمل على وجه الخصوص مسألة الاستيفاء الخاصة بتلك الصيغ ومعية الاستيفاء (أو آنية الاستيفاء بين صيغتين أو أكثر) لصيغتين أو أكثر تؤخذ معاً من بينها[1] .

وقد يصدم التقييد الموجود فى رقم ( ii ) القارئ بما يبدو فيه من تحكم . فلماذا لا نسمح بالصيغ من قبيل :

(ف هـ ⊂ جـ ى ) أو حتى (ف هـ ⊂ف ى)؟

وما هى النتيجة التى تترتب على السماح بمثل هذه التعبيرات ؟

فلنفحص هذه الإمكانية .

خذ الصيغة التالية :

( ١ ) ف هـ ⊂ جـ ى

فما دامت هذه صيغة مفتوحة فلا يمكن أن يقال عنها إنها صادقة أو كاذبة . وهنا تستخدم كم المحمول أو المكيف الكمى ( ∊ هـ ) ونطبقه فنحصل على ما يلى :

( ٢ ) ( ∊ ) (ف هـ ⊂ جـ ى )

ولكن هذه الصيغة تحتوى على متغير حر هو ( ى ) . ولذلك فعلينا أن نطبق مكيفاً كمياً آخر مثل ( ∊ ى ) مثلا . وبهذا نحصل على الآتى :

---

( ١ ) يلاحظ أن لفظة «آنية » من الألفاظ المستخدمة فى الرياضيات على مستوى المرحلة الإعدادية برغم أن هذا المصطلح قد يبدو فلسفياً محضاً . ويقال المعادلات الآتية ولا حرج على الإطلاق فى استخدامها لأنها تشير رياضياً إلى استخدام معادلتين فى آن واحد . ( المترجم ) .

(٣) (ء ى) (ء هـ) (ف هـ ⊃ ج ى)

وما هو المعنى الذى نعزوه إلى رقم (٣) إذن؟ يوجد بعض الخيار فى المعنى هنا ولكن أوضح المعانى هو الآتى :

(٤) هناك شيء هو (هـ) وشيء هو (ى) (وقد يكونان نفس الشيء أو قد لا يكونانه) بحيث لو كانت (هـ) تحمل الخاصية (ف) كانت (ى) تحمل الخاصية (ج) .

ويلاحظ أن هذا المعنى مختلف تماماً عن المعنى الخاص بالعبارة التالية :

(٥) (ء هـ) (ف هـ ⊃ ج هـ)

فهذه العبارة فى رقم (٥) تنص فقط على أنه يوجد شيء واحد على الأقل إما أنه لا يحمل الخاصية (ف) أو أنه يتصف بالخاصية (ج) . وهذه القضية يندر أن تكون كاذبة وهى فى العادة أتفه من أن تستحق التقرير) .

وقد يكون الفرق بين العبارتين التاليتين (٦) ، (٧) مثلا أوضح على ذلك :

(٦) (ء ى) (ء هـ) (ف هـ . ج ى)

(٧) (ء هـ) (ف هـ . ج هـ)

فالعبارة رقم (٦) إذا أمكن تفسيرها تفسيراً ملائماً وكان معناها مثلا أنه يوجد شيء أحمر وشيء مستدير أو يكون معنى العبارة رقم (٧) وفقاً لنفس التفسير أنه يوجد شيء أحمر ومستدير فى آن معاً ، ومن الواضح أن هذا أمر مختلف تماماً .

ويتجلى من هذا أنه يمكننا بناء صيغ ذات مكيفات كمية ثلاثية أو رباعية على هذا النمط . وهنا يقوم سؤالان :

( ا ) ما هى العلاقات القائمة بين الصيغ الجديدة والصيغ القديمة ؟

(ب) وبصفة خاصة هل تنبنى على هذه الصيغ الجديدة توسعات وتشعبات أصيلة لحسابنا هذا ؟

ولسوف نتقدم أولا للإجابة عن هذين السؤالين :

**٢ – الصيغ التى تحتوى على أكثر من مكيف كمى واحد :**

دعنا نتأمل السؤال الثانى أولا . وعلينا أن نعبر عنه على نحو أكثر دقة فنصوغة من جديد بقولنا :

(ب ب) هل تحمل بعض الصيغ الجديدة أو كلها من المعانى ما لا يمكن التعبير عنه بالصيغ القديمة ؟

ولهذا الغرض سوف نذهب إلى حد القول بأن الصيغتين ( س^) ، (ص^) يكون لهما نفس المعنى إذا كان أى تفسير يستوفى فى ( س^) يكون مستوفى أيضاً فى (ص^) وبالعكس . والإجابة عن السؤال (ب ب) هى فى الواقع لا . فالصيغ الجديدة لا تتميز على الصيغ القديمة بما صدق أكثر أصالة ، ولا نستطيع هنا أن نقدم برهاناً صورياً على هذا . ولكننا نكتفى بذكر عدد من الأمثلة التى توضح العلاقة بين الصيغ الجديدة والصيغ القديمة . خذ مثلا الصيغ التالية :

(١) (∈ هـ) • (∈ ى) (ف هـ • جـ ى)

(٢) (∈ هـ) (ف هـ) • (∈ هـ) (جـ هـ)

(٣) (∈ هـ) (ف هـ • جـ هـ)

وبقليل من التفكير يقتنع القارئ أنه برغم عدم اجتماع (١) ، (٣) على نفس المعنى فإن (١) ، (٢) يملكان نفس المعنى . وبالمثل :

( ٤ ) ( ∃ هـ ) ( ∃ ى ) ( ف هـ V جـ ى )

تعنى نفس الشىء مثل :

( ٥ ) ( ∃ هـ ) ( ف هـ ) V ( ∃ هـ ) ( جـ هـ )

وذلك لأن فى رقم ( ٤ ) قد تشير المتغيرات المقيدة ( هـ ) ، ( ى ) أو قد لا تشير إلى نفس الأشياء الفردية [١] . ويصدق نفس الشىء فيما يتعلق بالمرتين اللتين وقعت فيهما ( هـ ) داخل كمى المحمول أو « المكيفين الكميين »[٢] بالعبارة رقم ( ٥ ) .

وبالتالى فمنذ كانت ( سٌ ⊂ صٌ ) تكافئ ( ~ سٌ V صٌ ) كانت إذن كذلك :

( ٦ ) ( ∃ هـ ) ( ∃ ى ) ( ف هـ ⊂ جـ ى )

تكافئ

( ٧ ) ( ∃ هـ ) ( ∃ ى ) ( ~ ف هـ V جـ ى )

التى تكافئ بدورها :

( ٨ ) ( ∃ هـ ) ( ~ ف هـ ) V ( ∃ ى ) ( جـ ى ) .

---

( ١ ) الفرد ما يتناول شيئاً واحداً دون غير ( الجرجانى ) . ( المترجم ) .

( ٢ ) المكيف الكمى أو كم المحمول Quantifier هو اسم العلامة ( هـ ) التى تسبق الصيغة المنطقية ( أٌ ) التى تكون هى نفسها محتوية على ( هـ ) كمتغيرة للإشارة إلى أن ( أٌ ) تتضمن كل قيم ( هـ ) عادة بالنسبة إلى كل قيمها فى مجال معين من القيم الموجودة ضمنياً فى السياق أو المشار إليها ببعض العلامات . ويعطى هذا الاسم أيضاً كم المحمول أو المكيف الكمى العلامات والرموز المتغيرة أو المتناوبة المستخدمة لنفس هذا الغرض عندما يكون المكيف الكمى أو كم المحمول كلياً . أما إذا كان وجودياً فيوضع مسبوقاً بعلامة ( ∃ ) مثل ( ∃ هـ ) متقدماً على الصيغة المنطقية ( أٌ ) وتكون فى العادة معادلة لقيمة المكيف كم المحمول أو المكيف الكمى الكلى ( هـ ) .

وعلى ذلك فهذه الصيغ بما فيها من المتغيرين ذوى كم المحمول قد تنشق إلى تأليفات دوال الصدق للصيغ بمتغير واحد فقط ذى كم محمول وتوحى هذه الوقائع ( ولكنها لا تثبت بطبيعة الحال ) بما يكون عليـــه الأمر بالفعل وهو أن تلك الصيغ ذات التكميمات[١] العديدة يمكن دائماً أن تتحول إلى صيغ مكافئة لها عبارة عن دوال صدق خاصة بالصيغ ذات التكميمات المفردة .

وبناء على هذه الواقعة يكون تقديم مثل هذه الصيغ ذا أهمية نظرية ضئيلة ولن نتناولها بتفصيل أكبر من ذلك ها هنا . ولا شك فى أن الماصدق يكون ذا أهمية عملية بقدر ما يعين على إقامة براهين صورية ذات قدر أكبر من التعقيد . غير أن المنهج الذى يقرر المسالة المنطقية لمثل هذه البراهين لا يختلف إطلاقاً عن المنهج الذى تناولناه من قبل فى الفصل الخامس[٢] .

٣ ــ المحمولات ذات الحدين :

هناك ما صدق ذو أهمية نظرية كبيرة وهو إدخال المحمولات ذات الحدين فى نسقنا . وبعض القضايا المفردة تحتوى على أسمى علم أو أكثر . مثال ذلك :

( ١ ) حسن أطول من محمود

---

( ١ ) معناها تحديد الكم منطقيًّا بالرمز ( المترجم ) .

( ٢ ) من الأفضل فيما يتعلق بما قلناه فى الفقرة الثالثة من الفصل الخامس ، أن نؤكد أن ما نقوله هنا يرتبط فقط بالتعبيرات التى تحتوى على محمولات الحد الواحد (أو محمولات الموقع الواحد) مثل (أزرق) أو (ساخن) . ولا يمكن تطبيقه فى حالة التعبيرات التى تحتوى على محمولات أكثر تعقيداً مثل تلك التى ورد ذكرها فى الفقرة الثالثة والمشار إليها .

( ٢ ) تقع الإسماعيلية بين السويس وبور سعيد

فهذه القضايا تقرر وجود علاقة بين شيئين فرديين أو أكثر . ويمكن التعبير عنها رمزياً كالآتى :

( ٣ ) ف ا ب

( ٤ ) ف ا ب ج

فى رقم ( ٣ ) يمكن تفسير الحرف (ف) على أنه يعنى العلاقة ( أطول من ) . وفى رقم ( ٤ ) يمكن تفسير الحرف (ف) على أنه يعنى (الوقوع فيما بين) . ويقال عن ( أطول من ) أنها العلاقة ذات الحدين أو العلاقة الثنائية وعن ( الوقوع فيما بين ) أنها علاقة ذات ثلاثة حدود أو علاقة ثلاثية . ومن الممكن التفكير فى علاقات رباعية أو خماسية ذات أنظمة أرفع وإن كان ذكر هذه العلاقات لا يرد عادة كثيراً فى الكلام العادى .

وباستخدام المتغيرات وكم المحمول ( أو المكيفات الكمية ) نحصل على صيغ مثل :

( ٥ ) ( ∃ هـ ) ( ∃ ى ) · ( ف هـ ى )

( ٦ ) ( ∃ هـ ) ( ى ) ( ف هـ ى )

فإذا فسرنا (ف) بوصفها تعنى ( أطول من ) كان رقم ( ٥ ) يعبر عن القضية الصادقة .

( ٧ ) توجد ( هـ ) وتوجد ( ى ) بحيث تكون ( هـ ) أطول من ( ى ) .

وتعبر العبارة رقم ( ٦ ) وفقاً لنفس هذا التفسير عن القضية الكاذبة التالية :

( ٨ ) توجد ( هـ ) بحيث . . . وتكون ( هـ ) فى كل القيم أكثر طولا من ( ى ) .

وهذه كاذبة لأنه لا يمكن أن يكون شيء ، أطول من نفسه . ويعد إدخال العلاقات الثنائية وما عداها فى المنطق علامة تقدم ذات أهمية كبيرة . وقد يبدو لأول وهلة أنها مجرد محمولات عادية مثل ( أزرق ) و ( ساخن ) أو أى محمول آخر من النمط الذى تناولناه فى الفصل السابق . والخلاف الوحيد بينها هو أن ذلك ( الأزرق ) هو محمول الموضع الواحد الذى يصف شيئاً واحداً فقط فى كل مرة فى حين تعد ( فيما بين ) مثلا محمول المواضع الثلاثة الذى يتطلب أفراداً ثلاثة يصفها فى كل مرة يقع فيها . وهذا صحيح . غير أن النقطة الهامة هى أن العبور من محمولات الموضعين أو أكثر من الموضعين يؤدى إلى ظهور تعقيدات ذات شأن فى المنطق .

وقد رأينا أن المشكلة الأساسية فى منطق المحمولات هى مشكلة الاستيفاء لبعض الفئات المعطاة الخاصة بالصيغ ذات كم المحمول أو ذات المكيف الكمى . وإلى الآن عالجنا هذه المسألة — مسألة الاستيفاء — بطريقة حدسية . أعنى أننا اكتفينا بواقعة أن الصيغة تكون مستوفاة إذا أمكننا أن نعزو المعانى إلى حدود المحمول المتوفرة فيها حتى نحصل من وراء تفسيرنا على قضية صحيحة . وقد أقمنا تكنيكاً قابلا للتطبيق إلى صنف محدود من الصيغ هو عبارة عن تلك الصيغ التى سبق تناولها فى الفصل الخامس والتى ستعيننا على القول ما إذا كانت الصيغة الخاصة مستوفاة وما إذا كان العدد المحدود الخاص من الصيغ مستوفى فى آن معاً .

ولا نستطيع أن نقوم بمد وتوصيل هذه المعالجة الحدسية إلى الصيغ التى تنطوى على محمولات ذات حدين . وسوف نعرف أسباب ذلك فيما بعد .

والمهم هو أن نقوم بتحليل دقيق لفكرة الاستيفاء وأن نقدم تعريفاً دقيقاً صارماً لما نريد أن نشير إليه بقولنا إن هذه الصيغة مستوفاة . وهذه المعالجة التحليلية لن تفسد أى شىء مما قلناه بهذا الصدد . . . ولكنها سوف تصدر فى صورة فهم عميق لفكرة الاستيفاء التى تقوم بمثابة الأساس فى المنطق .

**٤ — الاستيفاء : المستويات المحدودة[1] :**

لنفرض أن لدينا مجموعة صغيرة مكونة من ثلاثة أشياء مختلفة مثلا . ولنفرض أننا نحصر اهتمامنا فى هذه المجموعة الصغيرة ، وأننا نفسر صيغنا دائماً فى حدود هـذه الأشياء : خصائصها وعلاقاتها . ونسمى هذه الأشياء ( $\hat{\text{أ}}$ ) ، ( $\hat{\text{ب}}$ )، ( $\hat{\text{ج}}$ ) . وتسمى هذه المجموعة من الأشياء المستخدمة بقصد تفسير الصيغ ، المستوى أو عالم المقال[2] .

ولننظر الآن فى محمول من عالم مقال عادى مثل ( أحمر ) . سيعمد هذا

---

( ١ ) أشار كتاب أصول الرياضيات فى الترجمة العربية إلى Domains باسم الميادين تمييزاً لها من المجالات Fields . وقد فضلنا هنا المستويات ترجمة للفظة Domains وهى أسلم . فالعدد الترتيبى ( ن ) هو الصنف أو الفئة الخاصة بالعلاقات المتسلسلة التى تشمل مستوياتها أو التى تبلغ مستوياتها ( ن ) من الحدود ، حيث ( ن ) عدد أصلى متناه . ويمكن أن نتصور مستوى خالياً تماماً من أى شىء كان . مثل مستوى الأصفار وهو مستوى الفئات أو الأصناف الفارغة أو ما يسميه باللا معرف . ( المترجم ) .

( ٢ ) عالم المقال Univers of discourse هو المستوى الذى تنسب إليه الصفة أو الأفراد الذين يدخلون تحت نوع من هذه الصفة . فالنفى لا يدل على نفى كل شىء فى الوجود عدا اللون الأبيض مثلا فى عبارة لا — أبيض ، وإنما يدل فقط على نفى الأسود والأحمر والأزرق والأصفر أى كل الأفراد الداخلة تحت نوع اللون . فالمنفى لا بد أن يشير فقط إلى عالم المقال المعين الذى تنتمى إليه الصفة المنفية والذى يستنفده المثبت والمنفى بينهما . انظر كتاب المنطق الصورى لعبد الرحمن بدوى — ص ٦٣ ( المترجم ) .

المحمول إلى قسمة هذه الأشياء الثلاثة إلى صنفين أو فئتين حسب انتماء كل منها إلى اللون الأحمر أو عدم انتمائه . وبهذا المعنى يقوم اللون الأحمر بتعريف صنف فى المستوى الخاص بهذه الأشياء ( أ̂ ب̂ ج̂ ) أى صنف الأشياء الحمراء فى هذا المستوى .

والآن نتأمل الأصناف المختلفة الممكنة فى مستوى ( أ̂ ب̂ ج̂ ) . . توجد ثمانية أصناف ممكنة بالضبط وهى :

١ ــ صنف اللاشىء ( وهو الصنف الذى لا يوجد فيه أى شىء إطلاقاً أو الفئة التى ليس فيها أفراد على الإطلاق ) .

٢ ــ الأصناف الثلاثة التى يتألف أفرادها فقط من أ̂ ، ب̂ ، ج̂ على التوالى .

٣ ــ الأصناف الثلاثة التى يتألف أفرادها فقط من ( أ̂ ، ب̂ ) ، ( أ̂ ، ج̂ ) ، ( ب̂ ، ج̂ ) على التوالى .

٤ ــ الصنف الذى يحتوى على ( أ̂ ، ب̂ ، ج̂ ) وهو الصنف الذى يمتد فى وقت واحد إلى كل المستوى .

ومن الممكن تسجيل هذه الأصناف على النحو التالى :

( ١ ) صفر

( ٢ ) [ أ̂ ]

( ٣ ) [ ب̂ ]

(٤) [ جˆ ]

(٥) [ اˆ بˆ ]

(٦) [ ا جˆ ]

(٧) [ بˆ جˆ ]

(٨) [ اˆ بˆ جˆ ][1]

ومن الواضح الآن أنه مهما كانت المحمولات التى نستخلصها لتعريف صنف فى هذا المستوى فمن الضرورى أن نعمل دائماً على تعريف واحد من بين هذه الأصناف الثمانية . وبالإضافة إلى ذلك سوف يعمل عدد كبير من المحمولات المختلفة على تعريف نفس الصنف كما أن كل هذه المحمولات المختلفة ستحمل برغم ذلك معانى مختلفة فى اللغة العادية . فمثلا ( اˆ ) قد يكون الشيء المستدير الوحيد . وعلى ذلك فأحمر ومستدير تعرفان نفس الصنف فى هذا المستوى . وبرغم ذلك فأحمر ومستدير تعنيان معنيين مختلفين تماماً

ولنفرض أن لدينا بعض الصيغ التى تنطوى على محمولات ذات حد واحد مثل :

( ء هـ ) (ف هـ )

وحاولنا تفسيرها فى مستوى ( اˆ بˆ جˆ ) . فمثلا فى إمكاننا أن نهب أى عدد من المعانى المختلفة إلى (ف) . ولكن هذه المعانى كلها سوف تعرف واحداً من بين هذه الأصناف الثمانية المذكورة . وبالتالى فبقدر ما يتعلق الاهتمام

---

(١) ملحوظة : يلاحظ هنا استخدام هذه الأقواس التى تشير إلى معنى الصنف .

فى هذا المستوى بموضوع الاستيفاء سيكون من الممكن إعطاء ( ف ) ثمانية تفسيرات فعلية فقط .

وواضح الآن أن مسألة الاستيفاء لأى صيغة ( تحتوى فقط على محمولات ذات حد واحد ) فى مستوى اْ بْ جْ ميسورة التحديد . فليس ثمة حاجة إلى البحث عما يتلاءم مع حدود المحمول المختلفة بالفعل وأعنى بها الثمانية التحويلات المختلفة الممكنة الخاصة بمحمول معين معطى إلى أصناف اْ بْ جْ . فمثلا :

( ٤ ﻫ ) ( ف ﻫ . ~ ج ﻫ )

تعد قضية مستوفاة فى هذا المستوى لأنه إذا ارتبطت (ف) ارتباطاً اقترانياً بالصنف [ ا ] وارتبطت ( ل ) كذلك بالصنف [ بْ ][1] فسيكون ثمة شىء وهو ( ا ) الذى يتصف بالخاصية (ف) وليس بالخاصية ( ل ) .

**٥ — المستويات المحدودة ( يتبع)[2] :**

ضربنا مثلا من مستوى يحتوى على ثلاثة أشياء وشرحنا المقصود من قولنا إن الصيغة تكون مستوفاة فى مثل هذا المستوى . ولكن من الواضح أنه كان فى إمكاننا أن نتأمل المستوى الذى يضم شيئاً واحداً أو شيئين اثنين أو ستة وعشرين

---

( ١ ) نقول إن (ف) مرتبطة اقترانيًا بالصنف ( اْ ) وهو الصنف الذى يكون أفراده عضواً وحيداً هو ( اْ ) إذا تم تحويل المعنى ( أحمر مثلا ) إلى (ف) بحيث تكون ( اْ ) هى الشىء الوحيد المتصف بهذه الخاصية فى هذا المستوى .

( ٢ ) لا يقال مستويات نهائية فى مقابل المستويات اللانهائية فى الرياضيات : ولذلك فضلنا هنا وضع المستويات المحدودة فى مقابل المستويات اللانهائية لأنها أكثر دلالة وأدق فى المعنى ولا تؤدى إلى اللبس الذى يمكن أن ينجم عن قولنا مستويات ( نهائية ) . وذلك فضلا عن أن المستوى المحدود مستخدم بالفعل عند رجال الرياضة العرب . ( المترجم )

شيئاً أو أى عدد آخر محدود من الأشياء . (سوف نرى فيما بعد أن المستويات اللانهائية نفسها أيضاً تلعب دورها ) ونستطيع برغم ذلك كله أن نتصور مستوى خالياً تماماً من أى شىء كان .

وهنا يرد سؤلان :

(أ) هل توجد صيغ مستوفاة فى بعض المستويات وغير مستوفاة فى مستويات أخرى ؟

(ب) هل توجد صيغ غير مستوفاة فى أى مستوى من المستويات ؟

ومن أجل الإجابة عن هذين السؤالين علينا أولا أن نوضح ما نعنيه بعبارة « مستويات مختلفة » . ولنحاول هذه المحاولة قبل كل شىء .

تعريف أول : سوف نقصد بقولنا « مستويات مختلفة » تلك المستويات التى تضم أعداداً مختلفة من الأشياء . وبعبارة أخرى تكون المستويات التى تضم نفس العدد من الأشياء فى حالة هوية بينها وبين بعضها أى أنها تكون كلها هى هى من أجل الأغراض المنطقية سواء كانت الأشياء الموجودة فى تلك المستويات مختلفة أم غير مختلفة .

وهذا التعريف يسمى بمبدأ التوسع « أو التشعب » وهو الذى يبرز المقصود بقولنا إن المنطق يعنى بالصورة لا بالمضمون أو بالمادة ( انظر الفصل الأول ) :

ويمكن الإجابة عن السؤال ( أ ) بسهولة كافية . فالصيغة :

( e ) ( ف ﻫ ا )

لا تقبل الاستيفاء فى مستوى مجالى فارغ . وفى الحقيقة لا تقبل أى قضية وجودية أن تكون مستوفاة فى مستوى فارغ لأسباب واضحة . وكذلك :

( e ﻫ ) ( ى ) ( ف ﻫ . ~ ف ى )

لا تقبل الاستيفاء فى مستوى يضم أقل من شيئين مميزين .وعموماً لدينا :

١ ـ فى حالة العدد المحدود ( ـ ) توجد صيغ لا تقبل الاستيفاء فى أى مستوى يضم أقل من ( ـ ) الأشياء .

٢ ـ إذا كانت إحدى الصيغ تقبل الاستيفاء فى مستوى يضم ( ـ ) من الأشياء فسوف تكون إذن قابلة للاستيفاء فى أى مستوى يضم أكثر من ( ـ ) من الأشياء .

وتوحى هذه الوقائع بالتعريف التالى عن « الاستيفاء عامة » .

تعريف ثان : تقبل الصيغة للاستيفاء (عامة) فى حالة واحدة فقط عندما يكون ثمة مستوى محدود تكون هذه الصيغة مستوفاة فيه

وبالمثل :

تعريف ثالث : تكون صيغتان أو أكثر قابلتين للاستيفاء فى آن معاً (أو متآلفتين ) فى حالة واحدة فقط عندما يتوافر مستوى تكونان فيه قابلتين للاستيفاء فى آن معاً .

وقد يلاحظ القارئ أن هذه التعريفات كما هى عليه ليست تامة الحبكة والدقة . وذلك لأنه برغم أننا قد خصصنا عبارة (لا تقبل الاستيفاء فى مستوى خال أو فارغ ) بمعنى معين ، أغفلنا تحديد ما نعنيه بقولنا إن الصيغة تقبل الاستيفاء فى مستوى خال أو فارغ . وفى إمكاننا إن نعطى هذه العبارة معنى ولكننا فى الحقيقة سوف نتحاشى هذا النزاع كلية بإدخال تعديل على التعريفين الثانى والثالث كالآتى :

تعريف ثان مكرر : تقبل الصيغة الاستيفاء (عامة) فى حالة واحدة فقط عندما يتوافر مستوى محدد غير خال تكون فيه قابلة للاستيفاء .

تعريف ثالث مكرر : تكون صيغتان أو أكثر قابلتين للاستيفاء (أو للتآلف ) فى آن معاً فى حالة واحدة فقط عندما يتوافر مستوى محدد غير خال تكونان فيه قابلتين للاستيفاء فى آن معاً .

**٦ ــ المحمولات ذات الحدين ــ المستويات اللانهائية[1] :**

تؤدى التعريفات الخاصة بالاستيفاء والتآلف عملها جيــداً حيال الصيغ التى تحتوى على المحمولات ذات الحد الواحد فقط أى بالنسبة إلى كل الصيغ التى سبق عرضها فى الفصل الخامس . ومنهج القرار القاطع مؤسس فى الحقيقة هنالك على استخدام حدسىّ للأفكار التى عدلنا هنا فأعطيناها تعبيراً دقيقاً محكماً فقط . والسؤال الآن هو : هل هذه التعريفات مكافئة أيضاً للصيغ التى تحتوى على محمولات ذات حدين مثل « ( هـ ) ( ف هـ ى ) » وما شابه ذلك ؟ والإجابة عن هذا السؤال هى أنها ليست مكافئة لها . وتعد واقعة أنها ليست مكافئة لها ، من أهم وقائع المنطق .

أولا : تأمل هذه الصيغة :

(١) (هـ) (ى) (ف هـ ى ⊃ ــ ف ى هـ )

وهى بالأسلوب الحدسىّ قابلة للاستيفاء . وافترض أن (ف) تعنى « أكبر من » . فعلى ذلك سيكون معنى العبارة رقم (١) ما يلى :

(٢) أياً تكن (هـ) ، (ى) . . . لو كانت (هـ) أكبر من (ى) كانت (ى) ليست أكبر من (هـ) .

ومن الواضح أن العبارة رقم (١) تقبل الاستيفاء فى مستوى محدود مثل المستوى الذى يضم الأعداد ١ ، ٢ . ( بطبيعة الحال هناك معان عديدة أخرى إلى جانب « أكبر من » لاستيفاء العبارة رقم (١) . مثال ذلك « والد » ، « إلى الشمال » ، « متأخر عن » ) .

---

(١) المستويات اللانهائية هى التعبير الرياضى المألوف باللغة العربية عند عامة المشتغلين بالرياضيات كمقابل للمستويات المحدودة التى سبق ذكرها . وهذا أسوة بقول المتوالية اللانهائية . (المترجم)

والآن تأمل :

(٣)  (هـ) (ى) (ز) (ف هـ ى ) ⊂ (ف ى ز ⊂ ف هـ ز )

ويتم استيفاء العبارة رقم (٣) بكل من « معادل » ، « أكبر من » ولكن ليس بالتعبير « أكبر بواحد من » .

(٤)  (ى) ( ⊕ هـ ) ( ف هـ ى )

ويتم استيفاء رقم (٤) بالتعبير « معادل »

ودعنا الآن نتساءل ماذا كانت (١) ، (٣) ، (٤) عبارات متآلفة أو قابلة للاستيفاء فى آن معاً . ومن الواضح أن الصحة المنطقية للعدد الكبير من صور الاستدلال تعتمد على إجابة هذا السؤال .

ولنفرض أن من هو المستوى الخاص بعدد (ن) من الأشياء :

أ١، أ٢، . . . . أن . . ولنفرض أن ( ع̂ ) هى العلاقة التى تستوفى رقم (١) أو بعبارة أخرى إذا كانت أو تمتلك العلاقة ( ع̂ ) بالنسبة إلى ان فليس من شأن ان أن تمتلك العلاقة ( ع̂ ) بالنسبة إلى او . ويمكننا تسجيل هذا كالآتى :

إذا كان ( أو ع̂ أن ) . . . كان لا — ( ان ع̂ او )

ولنفرض ان ( ع̂ ) تستوفى كذلك العبارة رقم (٣) أى

إذا كان ( او ع̂ أن )

وكان ( أن ع̂ أن )

كان ( أ و ع̂ أ ق )

وعلى ذلك فليس ثمة ما من شأنه أن يكون ( أ ق ع̂ أ و ) . ونختار أى شيء ضمن مستوى ( أ$_{١}$ ) فإذا كان من الضرورى استيفاء العبارة رقم ( ٤ ) فلابد أن يكون هنا لك شيء ما مثل ( أ$_{٢}$ ) بحيث يكون ( أ$_{١}$ ع̂ أ$_{٢}$ ) وبالمثـــل (ا$_{٢}$ ع̂ أ$_{٣}$ ) وهكذا . وبهذا يمكننا إنشاء سلسلة :

( أ$_{١}$ ع̂ أ$_{٢}$ ) . ( أ$_{٢}$ ع̂ أ$_{٣}$ ) . ( $_{٣}$ ع̂ أ$_{٤}$ ) . . . . . .

( أ$_{ح-١}$ ع̂ أ$_{ح}$ ) ومن الضرورى أن تنتهى أى سلسلة من هذا القبيل مادام لا يمكن أن تشتمل على أكثر من عدد ( ن ) من الأشياء فى المستوى . ولكن فى حالة العبارة رقم (٣ ) إذا كانت (أ$_{ق}$) تسبق ( أ$_{ح}$ ) فى السلسلة فليس هناك ما يستدعى أن تكون ( أ$_{ح}$ ع̂ أ ق ). وعلى ذلك لابد أن يكون ثمة شيء ما فى المستوى يناقض العبارة رقم ( ٤ ) .

وبرغم ذلك فالصيغ الثلاث تقبل الاستيفاء بوضوح بالمعنى الحدسى . إذ لو كان المستوى هو مستوى الأعداد الموجبـــة كانت ( ف ) تعنى « أكبر من » . . . لكانت العبارتان ( ١ ) ، ( ٣ ) مستوفاتين ولكانت العبارة ( ٤ ) أيضاً مستوفاة مادام فى كل حالة وجود الرقم ( ح ) يكون ثمة رقم ( و ) بحيث يكون هذا الأخير أكبر من ( ح ) . وذلك لأن ما يترتب على الأعداد الموجبة لا يصل إلى نهاية بحيث يقال عنه إنه مستوى لا نهائى .

وقد شهدنا فى الفقرة رقم ( ٤ ) أن بعض المستويات المحدودة قد تكون أكثر اتساعاً من سواها ( أى تضم عدداً أكثر من الأشياء ) وأن هذا الاختلاف بين المستويات ذو أهمية بالغة فى المنطق . ومن المتفق عليه أن نقول عن

مستويين من المستويات إنهما فى هوية معاً منطقياً أو تجريدياً إذا كانا يضمان نفس العدد من الأشياء . ويترتب على ذلك سؤال : هل بعض المستويات اللانهائية أكثر اتساعاً بمعنى من المعانى من غيرها أم أن كل المستويات اللانهائية تعد تجريدياً فى هوية ؟ أو بعبارة أخرى هل يتوافر للأغراض المنطقية مستوى واحد أو عدد كبير مميز تجريدياً من المستويات اللانهائية ؟ ولا يدخل فى إطار هذا الكتاب أن نجيب إجابة كاملة عن هذا السؤال . ولكن سوف نذهب من أجل الغرض الحالى ومن أجل التبسيط إلى أنه يوجد فقط مستوى لا نهائى واحد . وليس ذلك هو الشأن فى الواقع ولكن سيكون أقل مدعاة للاضطراب إزاء الأغراض المحدودة فى هذا التناول الحاضر أن نتكلم فى شيء من البساطة عن « المستوى اللانهائى » . وليس يعيب القواعد التالية أن هذا الادعاء الذى نسير بهديه لمواجهة احتياجات الموقف الحاضر غير صحيح . وعلى ذلك يمكننا أن نعد بعض قواعد الاستيفاء على النحو التالى :

**القاعدة الأولى** : إذا كانت الصيغة تقبل الاستيفاء فى بعض المستويات المحدودة فهى كذلك تقبل الاستيفاء فى المستوى اللانهائى .

**القاعدة الثانية** : إذا كانت الصيغة ذات المحمولات المكونة من حد واحد فقط تقبل الاستيفاء فى بعض الأحوال فهى على ذلك تقبل الاستيفاء فى بعض المستويات المحدودة .

**القاعدة الثالثة** : توجد صيغ تحتوى على محمولات ذات حدين ولاتقبل الاستيفاء إلا فى المستوى اللانهائى .

**٧ — الصدق المنطقى :**

قسمنا الصيغ الخاصة بحساب القضايا فى الفصل الثانى إلى صنفين أو فئتين

١ — تحصيل الحاصل .

٢ — صيغ أخرى من غير تحصيل الحاصل .

وتحصيل الحاصل هو الصيغة الصادقة منطقياً من حيث ضمانها لصورة معينة من صور الاستدلال . وينشأ عن هذا سؤال : هل نستطيع أن نخصص صنفاً ( أو فئة ) مماثلا لصيغ حساب المحمولات ؟ يمكننا ذلك فى حالة استخدامنا لفكرة الاستيفاء .

وقد شرحنا فى الفقرتين السابقتين المقصود بقولنا إن الصيغة تكون قابلة للاستيفاء فى المستوى ( م ن ) الذى يضم عدداً محدوداً ( ن ) من الأشياء . ويمكننا على ذلك أن نقسم صيغنا إلى فئتين ( أو صنفين ) :

ا — صيغ قابلة للاستيفاء فى ( م ن )

ا ا — صيغ غير قابلة للاستيفاء فى ( م ن )

ولنحاول الآن النظر فى الصنف التالى :

ا ا ا — صيغ تعد صور نفيها أعضاء فى الصنف ( ا ا ) السابق .

وسيقال عن ( ا ا ا ) إنها تنشئ صنفاً من الصيغ الصحيحة بداخل ( م ن ) ومن الواضح أن مثل هذه الصيغ سوف تعتبر دائماً عن قضايا صادقة مهما يكن التفسير الذى نعطيه لها ( فى حدود م ن )

وإذا كان مقدراً أن نعرف مقدماً عدد الأشياء التى يحتوى عليها هذا المستوى المذكور هنا كانت الصيغ الصحيحة فيه ضماناً لمختلف أشكال الاستدلال كأنها عبارات تحصيل الحاصل . وإذا كان عدد الأشياء الداخلة فى المستوى غير معروف لدينا كما هو الحال دائماً فى مثل هذه الأحوال فمن الواضح أن ادعاء أن المستوى يشتمل على أى عدد معين من الأشياء قد يؤدى إلى استدلالات مغارطة . ولهذا السبب لايمكن أن نكتفى بالصيغ الصحيحة فى بعض المستويات دون غيرها . ونستلزم أن تكون صيغنا صحيحة فى كل المستويات مع بعض الاستثناء المعين .

والاستثناء بهذا المعنى هو عدم ضرورة أن تكون صيغنا صحيحة فى المستوى الخالى أو المستوى الذى لا يضم إليه أى عضو . والمسألة هنا مسألة تخفيف وتيسير فحسب . فمثلا لو كان مباحاً لنا بأن نستفيد من هذا الاستثناء لتناولنا مثل هذه الصيغة :

( e ه (ف ه V ـــ ف ه)

على أنها صحيحة .

ولكن سيكون من غير المناسب إطلاقاً أن نجد أنفسنا دائماً مضطرين فى استدلالاتنا إلى تضمين مقدمة ظاهرة بقصد الإشارة إلى أنه يوجد شىء ما فى عالم المقال . ومن الأوفق كثيراً اعتبار الأمر مسلماً به .

وقد يدهش القارئ الآن إذا عرف أننا نمتلك الآن تخصيصاً كاملا للصدق المنطقى . فهل نستطيع أن نوسع من امتداد فئة الصيغ بطريقة ما وأن نقيم لهذه الفئة الممتدة من الصيغ معياراً معيناً من الصدق المنطقى يعد أقوى من فكرة الصحة والسلامة المنطقية التى سبق عرضها من قبل بحيث تكون الفكرة أقوى من فكرة تحصيل الحاصل ؟ والإجابة عن هذا السؤال مشحونة بالصعوبات الكثيرة ولا نستطيع أن نتناولها هنا بأى تفصيل قد نستطيع حقاً إيجاد امتداد لفئتنا من الصيغ بحيث نحصل على ما يسمى باسم ( امتداد حساب المحمولات ) . ويعد هذا الحساب أقوى بكثير من حساب المحمولات المحدود لكون هذا الأخير أقوى بدوره بكثير من حساب القضايا .

## ٨ — إجراءات الاستدلال القاطع :

يفهم من قولنا إجراء الاستدلال القاطع ذلك المنهج الذى يتقرر به ما إذا كانت إحدى الصيغ اللزومية arbitrary المعطاة فى إحدى الفئات

صحيحة منطقياً أم لا . وتوافرت لدينا مثل هذه الإجراءات بالنسبة إلى صيغ حساب القضايا فيما أسميناه بمنهج جداول الصدق أو منهج الصور الوصلية العادية . والملامح التى تجعل من هذه المناهج إجراءات للاستدل القاطع هى الآتية :

ا — يمكن تطبيقها على أى صيغة من صيغ حساب القضايا .

ا ا — تصل دائماً إلى إجابة ( فيما إذا كانت الصيغة تحصيل حاصل أم لا ) بعد عدد محدد من عمليات الحساب .

ولدينا كذلك إجراء استدلال قاطع خاص بحساب المحمولات ذات الحد الواحد ففى الفصل الخامس شرحنا منهجاً خاصاً بتقرير ما إذا كانت أى صيغة من نوع معين قابلة للاستيفاء أم لا . ورأينا أن الصيغة تكون صحيحة فى حالة واحدة فقط عندما تكون صيغتها المنفية غير قابلة للاستيفاء . وها هنا ينبنى إجراء الاستدلال القاطع على ادعائين :

أولهما : أن أى صيغة ( $\hat{ا}$ ) من مجموع حساب المحموت ذات الحد الواحد يمكن أن ترتبط ببعض صيغ ( $\hat{ب}$ ) من الفئة المحدودة فى الفصل الخامس بحيث لا تكون ( $\hat{ا}$ ) صحيحة إلا فى حالة واحدة فقط عندما تكون ( $\hat{ب}$ ) صحيحة .

وثانيهما : أنه إذا كانت إحدى صيغ حساب المحمولات ذات الحد الواحد صحيحة فى كل مستوى محدود ( غير فارغ ) كانت صحيحة كذلك فى المستوى اللا محدود .

وهذان الادعاءان صحيحان ولكن قد يلزم أن يضع القارئ فى اعتباره أننا لم نقم بتحقيقهما . ( فالبراهين على هذين الادعائين خارجة عن نطاق

هذا الكتاب ) وبالتالى يظل برهاننا ناقصاً فيما يتعلق بوجود مثل هذا الإجراء .

وإذا أضفنا إلى هذه الصيغ تلك الصيغ الأخرى التى تحتوى على محمولات ذات حدين أو ثلاثة أو عامة ذات عدد (ن) من الحدود حصلنا على ما أسميناه بحساب المحمول المحدود . فهل نملك إجراء استدلال قاطع خاص بهذا الحساب ؟ الواقع أننا لا نملك مثل هذا الاستدلال القاطع وقد لا نملك مثله إطلاقاً . وليس سبب ذلك سهل التوضيح بدون الدخول فى تفصيلات تقنية عديدة . ولكنه يرتبط ارتباطاً وثيقاً بحقيقة أن الادعاء رقم ( ١١ ) المذكور عاليه لا يسرى على حساب المحمول المحدود ككل موحد . ولعل بعض الملاحظات القليلة قد تفيد القارئ هنا .

الواقع أن إجراء الاستدلال القاطع عملية آلية فى جوهرها . ولو أمكننا أن نتقدم بمثل هذا الإجراء لكان فى مقدورنا دائماً أن نبتكر من حيث النظرية على الأقل جهازاً يحملها محمل التنفيذ بدون أى تدخل من قبل الإنسان. وأعم تصور لمثل هذا الجهاز الحاسب المعروف لدينا هو ما تقدم به فى سنة ١٩٣٦ الدكتور أ . م . تورينج Dr . A. M. Turing ولهذا السبب سميت كل الأجهزة التي تندرج تحت هذا التصوير باسم أجهزة تورينج . ومن المؤكد أنه إذا تم يوما إيجاد أى إجراء للاستدلال القاطع فى حساب المحمول المحدود فلن يكون الجهاز المبتكر من نفس نوع جهاز توربنج . والحقيقة أننا لا نملك أدنى تصور فيما يتعلق بما سوف تكون عليه أجهزة الحساب إذا لم تكن من نوع جهاز تورينج كما أننا لا نملك أدنى فكرة عن الطريقة التى يمكن أن يدار بها مثل هذا الجهاز الجديد .

## ٩ — أنساق البديهيات :

نعنى بقولنا « نسق البديهيات » ذلك المنهج الذى نستخرج به صيغاً صادقة منطقياً . ويتألف مثل هذا النسق عادة مما يلى :

ا – عدداً محدوداً من البديهيات .

ا ا – عدداً محدوداً من قواعد الاستدلال .

وقد أعطينا مثلا واحداً لنسق البديهيات وأعنى به ذلك النسق من أجل استخلاص واستخراج كل الصيغ الصادقة منطقيًّا فى حساب القضايا . ومن الواضح أنه لا بد فكريًّا من استيفاء الشرطين التاليين :

ا – كل صيغة صحيحة منطقيًّا (من الفئة المطلوبة) يجب أن تكون قضية اشتقاقية .

ا ا – لا تكون أى قضية غير صحيحة منطقيًّا اشتقاقية .

وقد برهنا على أن نسقنا الخاص بالبديهيات فى حساب القضايا قد استوفى هذين الشرطين .

وقد نسأل بطبيعة الحال هل يمكن توفير مثل هذا النسق الخاص بالبديهيات بصورته الكاملة المتآلفة لحساب المحمول المحدود ؟ والرد على هذا هو أنه من الممكن تدبير وابتكار نسق للبديهيات من أجل هذا الغرض بدون صعوبة كبيرة . والواقع أن أنساق البديهيات لحساب المحمول المحدود معروضة بدون البراهين المطلوبة للاستكمال والتآلف فى الكتب الأولية . وإذا كنا لم نقم بذلك هنا فسبب ذلك الوحيد هو أن الاعتبارات التى تؤدى إلى بنائه وإلى براهين تآلفه واستكماله تتطلب بالفعل فهماً كاملا لأفكار الصحة والاستيفاء الأساسية وإن لم تكن ذات صعوبة ما . وإذا تبين القارئ مقدرته من فهم الصحة والاستيفاء فهماً جيداً أمكنه الاطلاع على مرجع أساسى فى هذا الصدد . (راجع سلسلة المراجع فى الملاحظات النهائية فى كل فصل) .

وترتبط أنساق البديهيات ارتباطاً وثيقاً بإجراءات الاستدلال القاطع .

والواقع أن نسق البديهيات الكامل المتآلف هو نصف إجراء للاستدلال القاطع لأن الصيغة إذا كانت صحيحة منطقياً أمكنها أن تبلغنا بالأمر . ومن الواضح على أى حال أنه إذا لم تكن الصيغة صحيحة منطقياً (وبالتالى لم تكن ضمن قائمة الصيغ الاشتقاقية) فإن أى امتداد أو تشعب فى هذه القائمة لن يفيدنا شيئاً فى إبلاغنا بالأمر . ومن المدهش فيما يتعلق بالارتباط الوثيق بين نسق البديهيات وإجراءات الاستدلال القاطع أن نسق البديهيات يكون ممكناً عادة بالنسبة إلى حساب المحمول المحدود فى حين تكون إجراءات الاستدلال القاطع مستحيلة بالنسبة .إلى هذا الحساب . وكل ما تستطيع هذه الإجراءات بلوغه هو توفير طريقة لنا من أجل إنشاء قائمة بكل الصيغ الصحيحة منطقياً ولكن بدون موافاتنا بطريقة تعين على إقامة جدول خاص بالصيغ غير الصحيحة . ولا يهم المنهج الذى نتبعه من أجل إعداد قائمة بالصيغ غير الصحيحة منطقياً من هذا الحساب سواء أسقطت البعض من تقديرها أو ضمت إلى القائمة بعض الصحيح منها .

## مراجع الفصل السادس

من أفضل من تناول هذه الموضوعات الأولية الخاصة ببعض المشاكل والمسائل فى هذا الفصل ، كواين (٢٤) [١] . ويقدم لنا رايشنباخ (٢٥) عرضاً ممتازاً عن تقنيات حساب المحمول . والكتاب النصى المتداول فى هذا هو أيضاً كتاب هليبرت — أكرمان (١٢) . وراجع كلين (١٨) من أجل الإلمام بموضوع الأجهزة الآلية .

---

(١) أنظر أيضاً كتابه عن المنطق الأولى المنشور سنة ١٩٤١ فى بوسطن — نيويورك . (المترجم)

## إرشادات ومراجع عامة :

يعد كتاب كلين (١٨) من أدق البحوث وأكثرها إتقاناً فى حقل المنطق الرمزى . وليس هذا الكتاب من الكتب السهلة وعلى الطالب ألا يرجع إليه حتى يمتلك زمام كتاب هيلبرت – أكرمان (١٢) . وكتب كل من ڤيتش (١١) وليويس – لانجفورد (٢٠) وكواين (٢٣) ورايشنباخ (٢٥) واستروسن (٣٠) من الكتب العامه الجيدة عن المنطق الرمزى فى مراحله المتقدمة وتتناول موضوع العلاقة بين المنطق واللغة العادية تناولا ممتازاً . وكتاب روزنبلوم (٢٦) من الكتب المختصرة ذات العرض النسقى المفيد للطالب إذا كان على معرفة وشغف خاص بالتقنيات الرياضية . وأفضل كتاب أولى هو كتاب أمبروزولا زيروڤيتش (١) . ويمكن لقراء اللغة الفرنسية أن يرجعوا إلى كتاب دوب تحت عنوان : دروس فى المنطق الصورى (٣ أجزاء) المنشور فى لوفان سنة ١٩٥٠ ويعد مدخلا من الدرجة الأولى إلى هذا المنطق .

# BIBLIOGRAPHY

1 — Ambrose, A. & Lazerowitz, M.

Fundamentals of Symbolic Logic - New York, 1948.

2 — Bennett, A. & Baylis, C. A. - Formal Logic — New-York, 1746

3 — Bochenski, I. M.

Ancient Formal Logic — Amesterdom 1950.

4 — Boehner, P.

Medieval Logic — Manchester. 1962.

5 — Boole, G.

Mathematical Analysis of Logic — Oxford 1948, reprinted.

6 — Carroll, G.

Symbolic Logic — London 1897.

7 — Cooley, J. C.

Primer of Formal Logic — New-York 1942.

8 — Couturat, L.

Algebra of Logic — London 1914.

9 — De Morgan, A.

Formal Logic, London 1956.

14— Eaton, R. M.

General Logic — New York 1951.

11— Fitcn, F.P.

Symbolic Logic.

12— Hilbert, D. & Ackermann. W.

Principles of Mathematical Logic — New York 1950.

13— Jevons. W, S.

Studies in Deductive Logic — London 1884.

Principles of Science — London 1877.

14— Joseph. H. W. B.

Introduction to Logic — Oxford 1916.

15— Jonnson, W.E.

Logic 1 & 2 — Cambridge 1916.

16— Keynes, J. N.

Formal Logic — London 1906.

17— Kleene, S. K.

Introduction to Mathematics — New York 1952.

18— Langer, S. K.

Introduction to Symbolic — London 1937.

19— Lewis, C. I. & Langford, C. H.

Symbolic Logic — New York 1932.

20— Lukasiewicz, J.

Aristotles Syllogistic — Oxf. 1961.

21— M ce, C. A.

Principles of Logic — London 1933.

22— Quine, W. V. O.

Methods of Logic — New York 1950.

Mathematical Logic — Harvard 1951.

23— Reichenbach, H.

Elements of Symbolic Logic — New York 1947.

24— Rosenbloom, P.

Elements of Mathematical Logic — New York 1954.

25— Russell, B.

Introduction to Mathematical Philosophy — 1959.

26— Stebbing, L. S.

Modern Introduction to Logic — 1948

Modern Elementary Logic — 1952

27— Strawson, P. F.

Introduction to Logical Theory — 1952.

28— Tarski, A.

Introduction to Logic — New York 1941.

29— Venn, J.

Symbolic Logic — 1894.

30— Whitehead & Russell

Principia Mathematica — Cambridge 1 & 2 1925.

# المحتويات

الصفحة

الفصل الثالث :

## حساب القضايا ( يتبع )



الفصل الرابع :

## منهج البديهيات

الصفحة

الفصل الخامس :

## عناصر حساب المحمول



الفصل السادس:

## بعض التطورات والأبعاد الهامة

مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب

رقم الايداع بدار الكتب ٢٥١٤ / ١٩٨٧

ISBN ٩٧٧ - ٠١ - ١٢٩٧ - ٦

بدأت ملامح هذا المنطق تتضح عندما نشر كواين بحثه المشهور عن الأسس الجديدة للمنطق الرياضى معلقا على نظرية رسل وهوايتهيد فى كتابهما المسمى بالبرنكيبيا فى سنة ١٩٣٧ ، فأظهر كواين كيف اكتشف رسل أن نظرية الجبر المجرد يمكن استقاؤها من منطق العلاقات ، وأن هذه النظرية تؤدى إلى تعميمات رائعة ضخمة توفر للعلماء آله منهجية قوية لم يكن يتمتع بها منطق أرسطو . .




مطابع الهيئة المصرية العا

٢٠٠ قرش